



Appunti di fluidodinamica



# *Appunti di fluidodinamica*<sup>1</sup>

Ing. Pierpaolo Garofalo

Lanciano  
2008

<sup>1</sup>Documento scritto con L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X



# Indice

<b>1</b>	<b>Equazione di continuità</b>	<b>5</b>
1.1	Forme lagrangiana ed euleriana . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Equazione di bilancio della quantità di moto</b>	<b>7</b>
2.1	Forme integrali lagrangiana ed euleriana . . . . .	7
2.2	Risultante delle forze tangenziali . . . . .	9
2.3	Forma differenziale euleriana delle equazioni di Navier-Stokes .	11
2.4	Forma differenziale lagrangiana delle equazioni di Navier-Stokes . . . . .	12
2.4.1	Derivata sostanziale o totale di una funzione vettoriale	13
2.5	Cinematica dei fluidi: relazioni tra sforzi tangenziali e velocità	15
2.5.1	Fluido incompressibile . . . . .	19
2.5.2	Fluido compressibile . . . . .	19
2.6	La viscosità . . . . .	21
2.6.1	Espressione della $\mu$ col modello delle palle da biliardo .	21
<b>3</b>	<b>Particolarizzazione delle equazioni di Navier-Stokes</b>	<b>27</b>
3.1	Flusso incompressibile . . . . .	27
3.1.1	Espressione in coordinate cilindriche . . . . .	30
3.2	Considerazioni . . . . .	31
3.3	Equazioni di Navier-Stokes adimensionate . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Moto stazionario tra due piastre</b>	<b>34</b>
4.1	Introduzione . . . . .	34
4.2	Moto alla Couvette . . . . .	37
4.3	Moto alla Poiseuille . . . . .	38
4.4	Coefficiente di pressione Poiseuille . . . . .	40
4.5	Separazione laminare . . . . .	40
4.6	Tubo con flusso alla Poiseuille . . . . .	41
4.7	Considerazioni . . . . .	47

<b>5</b>	<b>Moto ed arresto impulsivo di lastra piana</b>	<b>48</b>
5.1	Moto impulsivo: I problema di Stokes . . . . .	48
5.2	Arresto impulsivo . . . . .	54
5.3	Legame tra $\delta$ e $\mathcal{R}e$ . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Equazioni di Prandtl e Von Kàrmàn</b>	<b>56</b>
6.1	Semplificazione di Prandtl delle equazioni di Navier Stokes . .	56
6.2	Risoluzione integrale delle equazioni di Prandtl: equazione di Von Kàrmàn . . . . .	60
6.2.1	Spessore di spostamento <i>Displacement thickness</i> . . . . .	63
6.2.2	Spessore di quantità di moto <i>Momentum thickness</i> . . . . .	63
6.2.3	Equazione di Von Kàrmàn adimensionata . . . . .	64
6.2.4	Equazione di Von Kàrmàn: profilo di velocità lineare .	65
6.2.5	Equazione di Von Kàrmàn: metodo di Polhausen . . .	68
6.2.6	Equazione di Von Kàrmàn: metodo di Thwaites . . . .	75
<b>7</b>	<b>Equazione di Blasius: soluzione esatta delle equazioni di Prandtl per la lastra piana</b>	<b>80</b>
7.1	La funzione di corrente $\Psi$ . . . . .	80
7.2	L'equazione di Blasius . . . . .	85
7.3	Risoluzione dell'equazione di Blasius . . . . .	86
7.3.1	Il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine . . . . .	87
7.3.2	Soluzione . . . . .	95
7.3.3	Calcolo dei parametri di strato limite . . . . .	109
7.3.4	Velocità di spostamento . . . . .	113
<b>8</b>	<b>Atti di moto laminare con gradiente di pressione arbitrario</b>	<b>114</b>
8.1	Strato limite Falkner-Skan . . . . .	114
8.1.1	Soluzione . . . . .	119
8.2	Strato limite al punto di arresto Stagnation point . . . . .	123
8.2.1	Soluzione . . . . .	127
8.2.2	Parametri dell'atto di moto al punto di arresto . . . .	132
8.3	Separazione laminare . . . . .	135
8.3.1	Spessore di strato limite . . . . .	136
8.3.2	Spessore di spostamento . . . . .	136
8.3.3	Spessore di quantità di moto . . . . .	136
8.3.4	Coefficiente di frizione a parete . . . . .	136
8.3.5	Fattore di forma . . . . .	137

8.4	Evoluzione dello s.l. dal punto di arresto alla separazione . . .	137
<b>9</b>	<b>Transizione da moto laminare a turbolento</b>	<b>138</b>
9.1	Caratteristiche dei moti turbolenti . . . . .	138
9.1.1	L'anemometro a filo caldo . . . . .	139
9.2	Criteri di transizione . . . . .	140
9.2.1	Il numero di Reynolds . . . . .	140
9.3	Criterio di Michel $\mathcal{Re}_\theta$ . . . . .	141
9.4	Teoria idrodinamica della stabilità : l'equazione di Orr-Sommerfeld . . . . .	141
9.5	Il metodo $e^N$ . . . . .	148
<b>A</b>	<b>Richiami sui vettori</b>	<b>150</b>
A.1	Derivata di versori in coordinate cilindriche . . . . .	150
A.2	Gradiente . . . . .	150
A.2.1	Coordinate cartesiane ortogonali . . . . .	150
A.2.2	Coordinate cilindriche . . . . .	151
A.3	Laplaciano . . . . .	151
A.3.1	Laplaciano di uno scalare . . . . .	151
A.3.2	Laplaciano di un vettore . . . . .	153
A.4	Divergenza . . . . .	155
A.4.1	Coordinate cartesiane ortogonali . . . . .	155
A.4.2	Coordinate cilindriche . . . . .	156
A.5	Rotore . . . . .	157
A.5.1	Coordinate cartesiane ortogonali . . . . .	157
A.5.2	Coordinate cilindriche . . . . .	158
A.5.3	$\vec{\omega} \wedge \vec{V}$ . . . . .	159
<b>B</b>	<b>Teoremi utili</b>	<b>160</b>
B.1	Teorema di trasformazione di Reynolds . . . . .	160
B.2	Teorema di Gauss . . . . .	163
B.2.1	Corollario . . . . .	163
B.3	Teorema di reciprocità di Cauchy . . . . .	164
<b>C</b>	<b>Considerazioni sul rotore della velocità</b>	
	$\nabla \wedge \vec{V}$	<b>165</b>
<b>D</b>	<b>Similitudine</b>	<b>167</b>
D.1	Il teorema $\pi$ di Buckingham . . . . .	168

<b>E</b>	<b>Gruppi adimensionali notevoli</b>	<b>172</b>
E.1	Numero di Biot . . . . .	172
E.2	Numero di Nusselt . . . . .	172
E.3	Numero di Prandtl . . . . .	173
E.4	Numero di Reynolds . . . . .	174
E.5	Numero di Mach . . . . .	174
E.6	Numero di Froude . . . . .	175
E.7	Numero di Knudsen . . . . .	176

# Capitolo 1

## Equazione di continuità

### 1.1 Forme lagrangiana ed euleriana

L'equazione di continuità esprime la conservazione della massa all'interno di un volume di controllo che non scambia materia con l'esterno. La massa contenuta all'interno di un dato volume  $V$  risulta data dalla:

$$M = \int_V \rho \, dv$$

Inseguendo il volume in questione, la **equazione di continuità in forma integrale Lagrangiana** risulta espressa dalla:

$$\frac{DM}{Dt} = 0$$

Applicando la Eq. (B.1) si ha:

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \, dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \, dv + \int_{S_c} \rho \, \vec{V} \cdot \vec{n} \, dSc = 0$$

ne deriva la **equazione di continuità Euleriana in forma integrale**:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \, dv = - \int_{S_c} \rho \, \vec{V} \cdot \vec{n} \, dSc} \quad (1.1)$$

La **forma differenziale dell'equazione di continuità Euleriana** si ottiene applicando alla Eq. (1.1) il teorema del flusso di Gauss<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \, dv = - \int_{V_c} \nabla(\rho \vec{V}) \, dv$$

---

<sup>1</sup>  $\int_S \vec{\phi} \cdot \vec{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \vec{\phi} \, dv$

Dall'equazione sopra discende la:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho \vec{V})} \quad (1.2)$$

Manipolando la Eq. (1.2) si ottiene la sua forma Lagrangiana differenziale.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla(\rho \vec{V}) \\ &= -\rho \nabla(\vec{V}) - \vec{V} \nabla(\rho) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla(\vec{V}) + \vec{V} \nabla(\rho) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

dividendo la Eq. (1.3) per  $\rho$  si ottiene la:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \vec{V}} \quad (1.4)$$

dividendo invece la Eq. (1.3) per  $-\rho^2$  si ottiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho^2} \vec{V} \nabla \rho - \frac{1}{\rho} \nabla \vec{V} &= 0 \\ \left( \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial t} + \vec{V} \nabla \frac{1}{\rho} \right)^2 - \frac{1}{\rho} \nabla \vec{V} &= 0 \\ \frac{d \frac{1}{\rho}}{dt} &= \frac{1}{\rho} \nabla \vec{V} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\boxed{\frac{1}{v} \frac{dv}{dt} = \nabla \vec{V}} \quad (1.6)$$

Le Eq. (1.4) e Eq. (1.6) rappresentano entrambe la **equazione di continuità in forma differenziale Lagrangiana** ed evidenziano rispettivamente che la divergenza con segno del vettore velocità  $\nabla \vec{V}$  rappresenta il tasso di compressione o dilatazione nel tempo della particella fluida.

---

<sup>2</sup>Ricordando che data una funzione  $f(x(t), y(t), z(t), t)$  la sua derivata totale risulta:  $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \nabla f$

# Capitolo 2

## Equazione di bilancio della quantità di moto

### 2.1 Forme integrali lagrangiana ed euleriana

L'equazione di bilancio della quantità di moto relativa ad un fluido confinato all'interno di un volume  $V$  si ottiene ricorrendo alla seconda legge di Newton applicata a ciascuna delle particelle costituenti il fluido.

$$\sum F_i = \frac{d(mu)_i}{dt} \Big|_{(i=1,2,3)}$$

Considerando le forze agenti sulla particella fluida come:

- forze di volume
- forze di superficie
  - forze di pressione
  - forze tangenziali

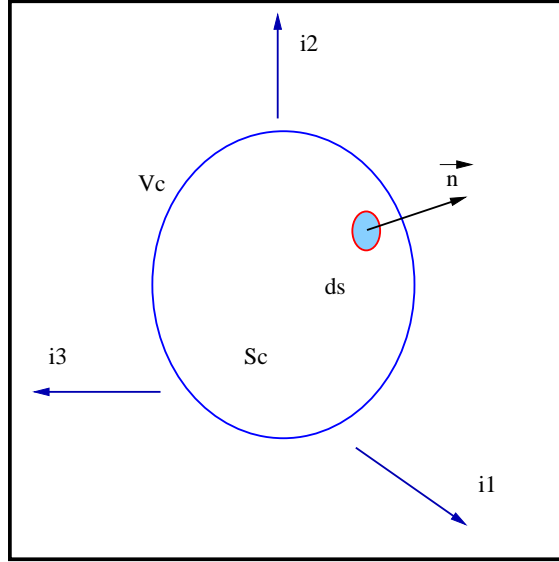
l'espressione *lagrangiana dell'equazione di bilancio integrale della quantità di moto* assume la forma:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u_i dv = \int_V \gamma_i dv - \int_S P \vec{n} \cdot \vec{i} dS + \int_S \tau_i dS \Big|_{(i=1,2,3)} \quad (2.1)$$

Applicando il teorema di Reynolds al primo membro dell'equazione sopra se ne ottiene la *espressione integrale del bilancio della quantità di*

---

<sup>1</sup>Il segno meno deriva dall'aver considerata come positiva la direzione uscente del versore normale  $\vec{n}$  alla superficie di controllo.



*moto in forma euleriana:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i dv = - \int_S \rho u_i \vec{V} \vec{n} dS + \int_V \gamma_i dv - \int_S P \vec{n} \vec{i}_i dS + \int_S \tau_i dS \Big|_{(i=1,2,3)} \quad (2.2)$$

Nell'espressione euleriana compare tra le forze presenti nel secondo membro il contributo dovuto alla quantità di moto del flusso di fluido scambiato dal volume di controllo attraverso la sua superficie con l'esterno<sup>2</sup>. Sfruttando il teorema del flusso di Gauss, trasformando gli integrali di superficie che compaiono nella Eq. (2.2) in integrali di volume, si ottiene la forma differenziale della stessa, ossia le equazioni di Navier-Stokes.

Il flusso della quantità di moto diventa:

$$\begin{aligned} \int_S \rho u_i \vec{V} \vec{n} dS &= \int_V \nabla(\rho u_i \vec{V}) dv \\ &= \int_V \left( \frac{\partial(\rho u_i u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_i u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_i u_3)}{\partial x_3} \right) dv \Big|_{(i=1,2,3)} \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup> $\rho \vec{V} \vec{n}$  rappresenta la massa di fluido scambiata con l'esterno nell'unità di tempo. Questa, moltiplicata per  $u_i$ , fornisce la quantità di moto nella direzione  $i$  scambiata con l'esterno.

La risultante delle forze di pressione:

$$\begin{aligned}
 \int_S P \vec{n} \vec{v}_i dS &= \vec{v}_i \int_S P \vec{n} dS \\
 &= \vec{v}_i \int_V \nabla P dv \\
 &= \int_V \frac{\partial P}{\partial x_i} dv \Big|_{(i=1,2,3)}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

L'esplicitazione della risultante delle forze tangenziali richiede degli approfondimenti.

## 2.2 Risultante delle forze tangenziali

Si consideri un elemento di superficie unitaria individuato come in Fig. 2.1 di normale  $\vec{n}$ . Sia  $\vec{T}$  il vettore risultante degli sforzi di superficie agenti sulla faccia di normale  $\vec{n}$ . Si indichi inoltre con:

$$\tau_{ij}$$

la componente dello sforzo di superficie agente sulla faccia di normale  $\vec{i}$  che spira nella direzione  $j$ . L'equilibrio<sup>3</sup> del tetraedro porta alla:

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

Il tensore degli sforzi superficiali che compare nella Eq. (2.4) è simmetrico in virtù del teorema di reciprocità di Cauchy Eq. (B.6).

È da osservare che le componenti di sforzo normale  $\sigma_{ii}$  contengono due contributi:

1. Un contributo idrostatico dovuto alla pressione del fluido circostante  $-P$ , del quale si è già tenuto conto in precedenza nell'Eq. (2.3), negativo in quanto opposto al versore  $\vec{n}$ ;
2. Un contributo di sforzo viscoso  $\tau_{ii}$  dovuto all'espansione o contrazione del volume elementare;

---

<sup>3</sup>Equilibrio statico in quanto le componenti di accelerazione dipendenti da volumi, e non da superfici, sono di ordine di grandezza trascurabile. Vedere a tale proposito l'App. B.3.

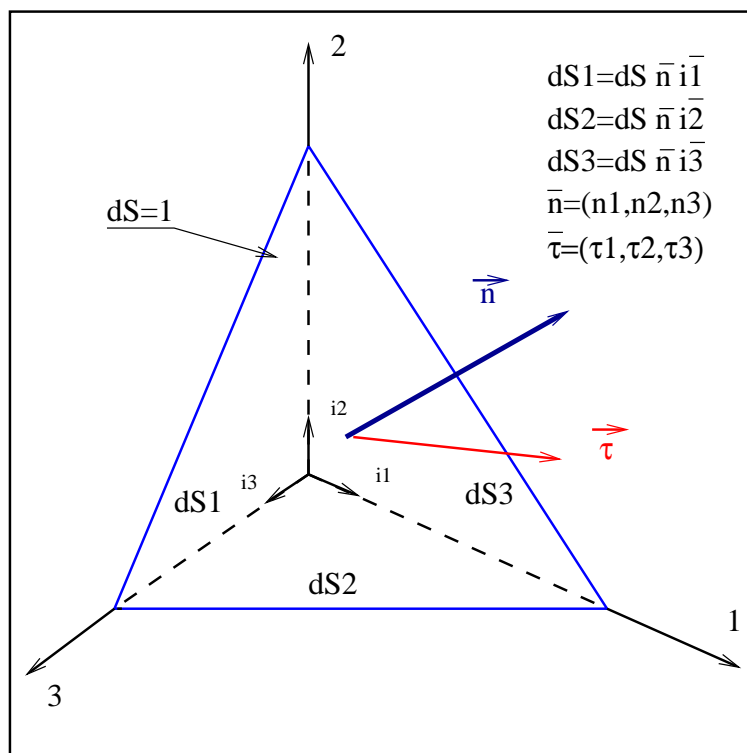


Figura 2.1: Tetraedro elementare.

## 2.3 Forma differenziale euleriana delle equazioni di Navier-Stokes

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} - P & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} - P & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} - P \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\vec{T} = \left[ \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{pmatrix} - P I \right] \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

Si può ora esplicitare l'integrale di superficie relativo alle forze tangenziali nelle tre direzioni:

$$\int_S \tau_i dS \Big|_{(i=1,2,3)} = \int_S (\tau_{1i} n_1 + \tau_{2i} n_2 + \tau_{3i} n_3) dS \Big|_{(i=1,2,3)} \quad (2.6)$$

$$= \int_S \vec{\tau}_i^4 \vec{n} dS \Big|_{(i=1,2,3)} \quad (2.7)$$

$$= \int_V \nabla \vec{\tau}_i dv \Big|_{(i=1,2,3)} \quad (2.8)$$

$$= \int_V \left( \frac{\partial \tau_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{3i}}{\partial x_3} \right) dv \Big|_{(i=1,2,3)} \quad (2.9)$$

## 2.3 Forma differenziale euleriana delle equazioni di Navier-Stokes

L'espressione integrale in termini di integrali di volume:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i dv + \int_V \left( \frac{\partial(\rho u_i u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_i u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_i u_3)}{\partial x_3} \right) dv =$$

$$\int_V \gamma_i dv - \int_V \frac{\partial P}{\partial x_i} dv + \int_V \nabla \vec{\tau}_i dv \Big|_{(i=1,2,3)}$$

Adottando la notazione tensoriale di variazione degli indici:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \gamma_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \Big|_{(i=1,2,3)}} \quad (2.10)$$

---

<sup>4</sup> $\vec{\tau}_i = (\tau_{1i}, \tau_{2i}, \tau_{3i})$

Si può ottenere la forma compatta vettoriale:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} \cdot \vec{V}) = -\nabla P + \vec{\gamma} + \nabla \vec{T}} \quad (2.11)$$

in cui si è posto:

$$\begin{aligned} \nabla(\rho \vec{V} \cdot \vec{V}) = & \left[ \frac{\partial(\rho u_1 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2 u_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3 u_1)}{\partial x_3} \right] \vec{i}_1 + \\ & \left[ \frac{\partial(\rho u_1 u_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3 u_2)}{\partial x_3} \right] \vec{i}_2 + \\ & \left[ \frac{\partial(\rho u_1 u_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2 u_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3 u_3)}{\partial x_3} \right] \vec{i}_3 \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{T} = & \left[ \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right] \vec{i}_1 + \\ & \left[ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} \right] \vec{i}_2 + \\ & \left[ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \right] \vec{i}_3 \end{aligned}$$

## 2.4 Forma differenziale lagrangiana delle equazioni di Navier-Stokes

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} \cdot \vec{V}) = -\nabla P + \vec{\gamma} + \nabla \vec{T}$$

Si sviluppa il primo membro:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \nabla(\rho \vec{V}) + \rho \vec{V} \nabla(\vec{V}) &= -\nabla P + \vec{\gamma} + \nabla \vec{T} \\ \vec{V} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) \right) + \rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \nabla(\vec{V}) \right) &= -\nabla P + \vec{\gamma} + \nabla \vec{T} \end{aligned}$$

$$\boxed{\rho \frac{d \vec{V}}{d t} = -\nabla P + \vec{\gamma} + \nabla \vec{T}} \quad (2.12)$$

Una ulteriore manipolazione del primo membro dell'equazione così ottenuta permette di evidenziare le componenti costituenti l'accelerazione.

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\vec{V} \cdot \vec{V}) + \vec{\omega} \wedge \vec{V} \right) = - \nabla P + \vec{\gamma} + \nabla \vec{T} \quad (2.13)$$

### 2.4.1 Derivata sostanziale o totale di una funzione vettoriale

Ci si propone di trovare una espressione della derivata totale lagrangiana di una funzione vettoriale.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \dots$$

Per semplicità si può procedere con una componente:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \nabla u^7 \end{aligned}$$

In forma vettoriale, considerando analoghe relazioni per le rimanenti componenti:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} \quad (2.14)$$

in cui l'operatore:

$$(\vec{V} \nabla)(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial x} u + \frac{\partial(\dots)}{\partial y} v + \frac{\partial(\dots)}{\partial z} w$$

o anche:

$$(\vec{V} \nabla)(\dots) = \vec{V} \text{ grad } \vec{V}$$

<sup>5</sup>Termine nullo per l'equazione di continuità Eq. (1.2)

<sup>6</sup>Derivata totale del vettore velocità  $\vec{V}$

<sup>7</sup>Cf.ta Nota 2

Una ulteriore manipolazione permette di mettere in risalto le componenti di rotazione del moto.

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w \\
 &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial x}v + \frac{\partial w}{\partial x}w + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + v \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2/2}{\partial x} + \frac{\partial v^2/2}{\partial x} + \frac{\partial w^2/2}{\partial x} + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + v \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2/2 + v^2/2 + w^2/2) + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + v \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u^2 + v^2 + w^2)}{\partial x} + w \overbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)}^{\omega_2} - v \overbrace{\left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)}^{\omega_3} \\
 \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u^2 + v^2 + w^2)}{\partial y} + w \overbrace{\left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)}^{-\omega_1} + u \overbrace{\left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)}^{\omega_3} \\
 \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u^2 + v^2 + w^2)}{\partial z} + v \overbrace{\left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)}^{\omega_1} + u \overbrace{\left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)}^{-\omega_2}
 \end{aligned}$$

Al secondo membro delle equazioni di sopra si riconosce la presenza di termini del rotore del vettore  $\vec{V}$ :

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} &= \vec{i} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \vec{j} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 &= \vec{i} \omega_1 + \vec{j} \omega_2 + \vec{k} \omega_3 \\
 &= \nabla \wedge \vec{V} \\
 &= \vec{\omega}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u^2 + v^2 + w^2)}{\partial x} + w \omega_2 - v \omega_3 \\
 \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u^2 + v^2 + w^2)}{\partial y} - w \omega_1 + u \omega_3 \\
 \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u^2 + v^2 + w^2)}{\partial z} + v \omega_1 - u \omega_2
 \end{aligned}$$

## 2.5 Cinematica dei fluidi: relazioni tra sforzi tangenziali e velocità

A questo punto sono evidenti al secondo membro delle equazioni sopra i termini del prodotto vettoriale  $\vec{\omega} \wedge \vec{V}$ :

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \wedge \vec{V} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ u & v & w \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(\omega_2 w - \omega_3 v) - \vec{j}(\omega_1 w - \omega_3 u) + \vec{k}(\omega_1 v - \omega_2 u)\end{aligned}$$

Si può riscrivere:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(V^2)}{\partial x} + (\vec{\omega} \wedge \vec{V})_x \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(V^2)}{\partial y} - (\vec{\omega} \wedge \vec{V})_y \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(V^2)}{\partial z} + (\vec{\omega} \wedge \vec{V})_z\end{aligned}$$

e in definitiva:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) + \vec{\omega} \wedge \vec{V} \quad (2.15)$$

La Eq. (2.15) permette allora la scrittura della Eq. (2.13).

## 2.5 Cinematica dei fluidi: relazioni tra sforzi tangenziali e velocità

Un fluido si definisce newtoniano quando la sua viscosità non varia con la velocità. Matematicamente questi fluidi presentano un legame di proporzionalità diretta tra il tensore degli sforzi viscosi e il tensore delle velocità di deformazione; la costante di proporzionalità è detta viscosità.

Lo sforzo tangenziale scambiato tra due elementi di area unitaria di normale  $\vec{n}_i$  in direzione  $\vec{n}_j$  adiacenti è direttamente proporzionale attraverso la **viscosità dinamica**  $\mu$  al gradiente di velocità tra gli stessi.

$$\tau_{ij} = \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

In genere il campo di velocità in seno ad un fluido può essere espresso in termini di sviluppo in serie nell'intorno del punto e nell'istante considerati:

$$\vec{V}(P) = (u_1(x(t), y(t), z(t), t), u_2(x(t), y(t), z(t), t), u_3(x(t), y(t), z(t), t))$$

## Cinematica dei fluidi: relazioni tra sforzi tangenziali e velocità 2.5

Nell'intorno di un dato punto  $P_0$  nell'istante  $t_0$  con  $i = 1, \dots, 3$  :

$$u_i(P, t_0) = u_i(P_0) + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_1 + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right)_{P_0} x_2 + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right)_{P_0} x_3 + o(\dots)$$

In notazione tensoriale:

$$u_i(P, t_0) = u_i(P_0) + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{P_0} x_j + o(\dots) \Big|_{(i=1,2,3)}$$

ossia:

$$\vec{V}(P) = \vec{V}(P_0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \vec{P} + o(\dots)$$

Il tensore sopra non è necessariamente simmetrico. Esso può comunque essere visto come somma di due parti, una simmetrica ed una antisimmetrica.

$$\begin{aligned} u_1(P, t_0) &= u_1(P_0) + \\ &\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_1 + \\ &\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)_{P_0} x_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)_{P_0} x_2 + \\ &\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)_{P_0} x_3 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)_{P_0} x_3 + \\ &\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_2 + \\ &\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_3 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_3 \end{aligned}$$

## 2.5 Cinematica dei fluidi: relazioni tra sforzi tangenziali e velocità

---

Riordinando:

$$\begin{aligned} u_1(P, t_0) = & u_1(P_0) + \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_1 + \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)_{P_0} x_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_2 + \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)_{P_0} x_3 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_3 + \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)_{P_0} x_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_2 + \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)_{P_0} x_3 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1(P, t_0) = & u_1(P_0) + \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_1 + \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_2 + \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)_{P_0} x_3 + \\ & \frac{1}{2} \overbrace{\left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)_{P_0}}^{-\omega_3} x_2 + \\ & \frac{1}{2} \overbrace{\left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)_{P_0}}^{\omega_2} x_3 \end{aligned}$$

## Cinematica dei fluidi: relazioni tra sforzi tangenziali e velocità 2.5

In base alle osservazioni sull'espressione del rotore della velocità e l'Eq. (C.1)

$$\begin{aligned}
 u_1(P, t_0) = & u_1(P_0) + \\
 & \overbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)}^{\varepsilon_{11}}_{P_0} x_1 + \\
 & \overbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)}^{\gamma_{12}}_{P_0} x_2 + \\
 & \overbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)}^{\gamma_{13}}_{P_0} x_3 - \\
 & \frac{1}{2} \omega_3 x_2 + \\
 & \frac{1}{2} \omega_2 x_3
 \end{aligned}$$

Compaiono a questo punto a secondo membro i termini del prodotto vettoriale (Cf.ta Eq. (C.1)):

$$\vec{\omega} \wedge (P - O) = \begin{vmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

che rappresenta la velocità di rotazione rigida del punto in esame intorno al polo  $O$ .

Si riconoscono inoltre tra parentesi i termini di velocità di deformazione dell'elemento fluido: allungamento e scorrimento (Cf.ta Fig. C.1).

L'espressione definitiva della velocità nell'intorno del punto in esame sarà quindi:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \wedge (P - O) + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} (P - O)$$

ponendo:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega}$$

si ottiene:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\Omega} \wedge (P - O) + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} (P - O)$$

(2.16)

## 2.5 Cinematica dei fluidi: relazioni tra sforzi tangenziali e velocità

dalla quale risultano evidenti le componenti di velocità di traslazione rigida, di rotazione rigida e le deformazioni dovute alla dilatazione o contrazione (le  $\dot{\epsilon}$ ) e le distorsioni (le  $\dot{\gamma}$ ) dell'elemento fluido in considerazione.

Il tensore della velocità di delle deformazioni nella Eq. (2.16) è simmetrico e suscettibile di diagonalizzazione rispetto ad un riferimento principale. La traccia di tale tensore, ossia la somma degli elementi sulla diagonale, è un invariante e rappresenta la divergenza della velocità .

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = Tr = \nabla \vec{V}$$

Questa rappresenta la dilatazione subita dal volumetto di fluido considerato nell'unità di tempo. Se questo volumetto è inizialmente di forma sferica, a causa della caratteristica della deformazione, ossia dal valore assunto dagli autovalori, in generale potrà trasformarsi in un ellissoide. Se il fluido è incompressibile la  $\nabla \vec{V} = 0$ , non si avranno variazioni in volume<sup>8</sup> e le componenti di sforzo viscoso saranno dovute solo alle velocità di scorrimento  $\dot{\gamma}_{ij}$ .

Gli sforzi viscosi saranno legati ovviamente al tensore delle velocità di deformazione e non al movimento di corpo rigido del fluido.

### 2.5.1 Fluido incompressibile

In seno ad un fluido Newtoniano incompressibile si avranno forze viscosi dovute ai soli scorrimenti:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 2 \mu \dot{\gamma}_{ij}$$

La grandezza  $\mu$  rappresenta la **viscosità dinamica**<sup>9</sup> del fluido dovuta allo scorrimento degli strati adiacenti.

### 2.5.2 Fluido compressibile

Se il fluido è compressibile le forze viscosi che nascono al suo interno possono essere imputate non solo alla sua distorsione ma anche alla possibilità di un suo cambiamento di volume. Il volumetto elementare di fluido può subire due tipi di deformazione: la distorsione (variazione di forma) e la variazione di

---

<sup>8</sup>La traccia del tensore è nulla per un qualunque riferimento scelto il che implica che la somma degli autovalori sia nulla. Una sferetta di fluido si può solo trasformare in un ellissoide di stesso volume.

<sup>9</sup>Shear viscosity.

volume. A queste possono essere associate due tipi di viscosità : la viscosità dinamica  $\mu$  **shear viscosity** e la viscosità di volume  $\zeta$  **bulk viscosity**. La viscosità di volume è di difficile misurazione e in genere piccola.

Il termine di variazione di volume è rappresentato dalla divergenza della velocità  $\nabla \vec{V}$  che rappresenta la traccia del tensore delle velocità di deformazione. Quest ultimo può essere *spezzato* in due tensori. Il primo a traccia nulla rappresenta la deformazione pura, il secondo la variazione di volume.

$$\begin{aligned} \vec{V} = & \overbrace{\vec{V}_0 + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}}^{\text{termini di spostamento rigido}} + \\ & \overbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left( 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{2}{3}\nabla \vec{V} \right) & \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \left( 2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{2}{3}\nabla \vec{V} \right) & \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \left( 2\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{2}{3}\nabla \vec{V} \right) \end{pmatrix}}^{\text{termini di deformazione pura}} (P - O) + \\ & \overbrace{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} \nabla \vec{V} & 0 & 0 \\ 0 & \nabla \vec{V} & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \vec{V} \end{pmatrix}}^{\text{termini di dilatazione pura}} (P - O) \end{aligned}$$

L'espressione degli sforzi tangenziali diviene allora:

$$\tau_{ii} = \mu \left( 2\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\nabla \vec{V} \right) + \zeta \nabla \vec{V}$$

e:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

L'espressione generale può essere scritta ricorrendo alla notazione  $\delta_{ij}$  di Kroneker<sup>10</sup>:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \vec{V} \right) + \zeta \delta_{ij} \nabla \vec{V} \quad (2.17)$$

<sup>10</sup> $(i == j) ? \delta_{ij} = 1 : \delta_{ij} = 0$

## 2.6 La viscosità

La viscosità dinamica è stata ipotizzata indipendente dalle condizioni del moto. Essendo quindi dipendente dal solo stato del fluido, essa è una funzione di stato.

L'unità di misura della viscosità dinamica risulta:

$$[\mu] = \frac{N \, s}{m^2} = pa \, s = \frac{kg}{m \, s}$$

Per praticità si utilizza il **Poise**:

$$1 \, Poise = 0.1 \, pa \, s$$

### 2.6.1 Espressione della $\mu$ col modello delle palle da biliardo

Il fenomeno della viscosità è un fenomeno di attrito. Esso nasce a causa del trascinamento che gli strati di fluido più veloci esercitano su quelli più lenti adiacenti o, viceversa, dall'azione frenante che gli strati più lenti esercitano su quelli più veloci adiacenti.

Questo effetto di trascinamento può essere immaginato come dovuto ad un trasferimento di quantità di moto tra strati a velocità differenti. Il meccanismo di trasferimento della quantità avviene a causa degli urti tra particelle degli strati a differenti velocità che per agitazione termica si trovano proiettate negli strati adiacenti. Il moto caotico di agitazione termica delle molecole determina la temperatura del fluido. L'energia di agitazione termica risulta distribuita equamente tra i gradi di libertà energetici<sup>11</sup>.

N. atomi	g.d.l. traslazionali	g.d.l. rotazionali	g.d.l. vibrazionali
1	3	0	0
2 o lineari	3	2	$2(n-5)$ <sup>12</sup>
$n$	3	3	$2(n-6)$

Tabella 2.1: Gradi di libertà molecolari.

L'energia cinetica di una molecola monoatomica è legata alla temperatura dalla relazione:

$$\frac{1}{2} m \bar{V}^2 = \frac{3}{2} K_B T$$

in cui:

<sup>11</sup>Teorema del virale.

<sup>12</sup>3 gradi di libertà traslazionali e 2 (molecola lineare) o 3 gdl di rotazione di corpo rigido, 2 gdl energetici vibrazionali (energia cinetica e potenziale).

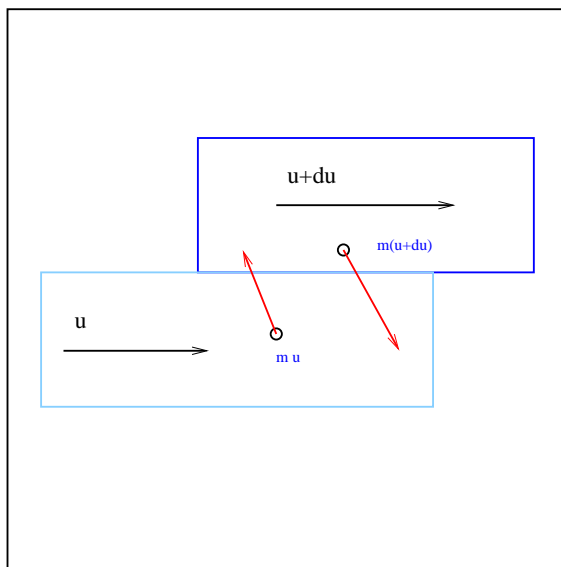


Figura 2.2: Meccanismo di trasferimento della quantità di moto

- $\bar{V}$  è la velocità media traslazionale di agitazione termica;
- $m$  è la massa della molecola;
- $K_B$  è la costante di Boltzman;
- 3 sono i gradi di libertà energetici di una molecola monoatomica;
- $T$  è la temperatura.

$$\bar{V} = \sqrt{3 \frac{K_B T}{m}} \quad (2.18)$$

Si può mostrare che la velocità media di agitazione termica sopra trovata è dello stesso ordine di grandezza della velocità di propagazione delle

perturbazioni di pressione nel fluido (velocità del suono). Infatti:

$$\begin{aligned}
 a &= \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{isoentropica}} \\
 &= \sqrt{\gamma \frac{R T}{M}} \\
 &= \sqrt{\gamma \frac{N_a K_B T}{N_a m}} \\
 &= \sqrt{\gamma \frac{K_B T}{m}}
 \end{aligned}$$

in cui:

- $R = N_a K_B = 8.314 \text{ J/(K mol)}$  è la costante elastica dei gas perfetti;
- $T$  è la temperatura assoluta del gas;
- $M = m N_a$  è la massa molare del gas;
- $N_a = 6.022 \times 10^{23} \text{ molecole/mole}$  è il numero di Avogadro;
- $K_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$  è la costante di Boltzmann;
- $m$  è la massa molecolare del gas;
- $\gamma = C_p/C_v = (L+2)/L$
- $C_p$  ;  $C_v$  calori specifici a pressione e volume costante;
- $L$  gradi di libertà energetici.

Queste due velocità sono quindi affini. Immettendo un disturbo di pressione in seno ad un fluido (e quindi una piccola quantità di energia), questo si propaga in virtù delle vibrazioni termiche delle molecole e gli urti che queste creano con le molecole adiacenti.

La distanza media percorsa da una molecola di gas tra due urti successivi viene definita **libero cammino medio**. Durante il suo cammino la molecola, vista come una sfera di raggio  $r$  e massa  $m$ , urterebbe le altre molecole che si venissero a trovare all'interno di un volume cilindrico di raggio  $2r$ . Il volume spazzato nell'unità di tempo sarebbe:

$$vol = \bar{V} (2r)^2 \pi$$

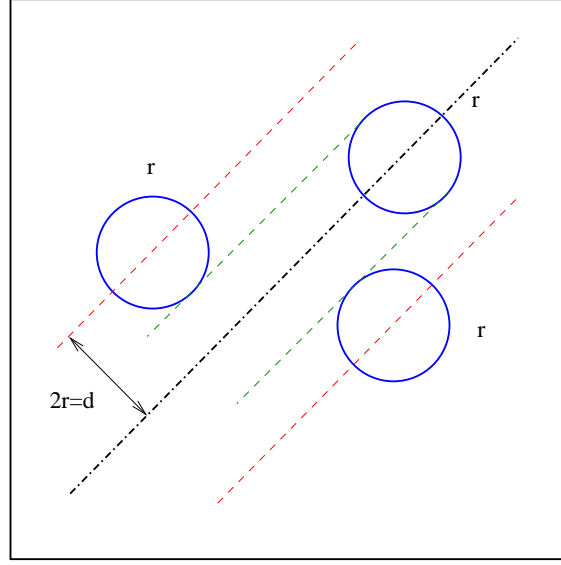


Figura 2.3: Volume d'urto.

Se  $n$  rappresenta il numero di molecole presenti nell'unità di volume allora il numero di urti nell'unità di tempo sarebbe:

$$\vartheta = \bar{V} (2r)^2 \pi n$$

cui corrisponderebbe un tempo medio tra due urti successivi:

$$T = \frac{1}{\vartheta} = \frac{1}{\bar{V} (2r)^2 \pi n}$$

e quindi un libero cammino medio  $l = \bar{V} T$ :

$$l = \frac{1}{\pi d^2 n} \quad (2.19)$$

Indicando con  $\sigma = \pi d^2$  la **sezione d'urto**, le tre espressioni del libero cammino sono equivalenti:

$$\boxed{l = \frac{1}{\sigma n} \quad n = \frac{\rho}{m} \quad l = \frac{m}{\rho \sigma}} \quad (2.20)$$

Il libero cammino medio può essere interpretato anche come la distanza percorsa da una molecola che per agitazione termica passa da uno stato ad un altro di differente velocità prima di urtare un'altra particella (e subire a

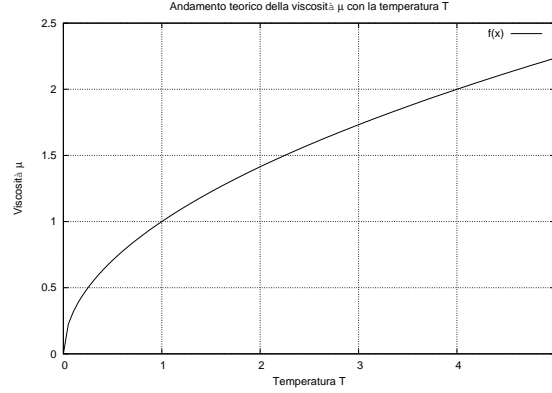


Figura 2.4: Andamento teorico di  $\mu$  con  $T$ .

causa di questo urto una variazione della sua velocità ). Nel semplice caso monodimensionale  $l$  può essere visto come la variazione  $\partial x_2$  lungo la quale si concretizza la variazione  $\partial u_1$  di velocità dovuta all'urto:

$$du = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} l$$

Se con  $n$  si è indicato il numero di molecole presenti nell'unità di volume allora:

$$n \bar{V} dS m (u + du)_1 - n \bar{V} dS m u_1 = n \bar{V} dS m du_1$$

rappresenta il flusso di quantità di moto che attraversa la superficie elementare  $dS$  di separazione tra gli strati nell'unità di tempo. La forza di trascinamento scambiata tra gli strati attraverso la superficie  $dS$  sarà allora:

$$dF_{21} = n m du_1 \bar{V} dS = n m \frac{\partial u_1}{\partial x_2} l \bar{V}$$

ne segue:

$$\tau_{21} = (n m l \bar{V}) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (2.21)$$

Ricordando le Eq. (2.18) e Eq. (2.20):

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sigma} \sqrt{3 m K_B T}} \quad (2.22)$$

Si vede che l'andamento teorico della viscosità è  $\mu \propto \sqrt{T}$  come da Fig. 2.4.

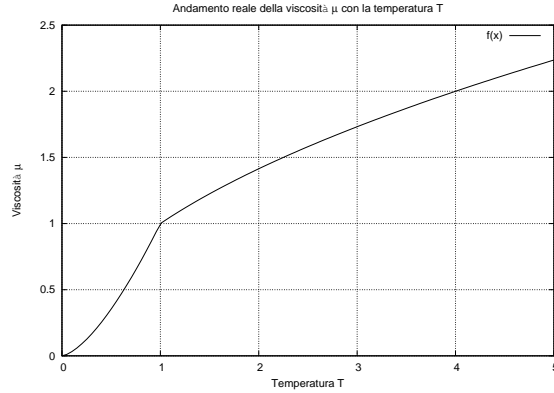


Figura 2.5: Andamento reale della viscosità .

In effetti l'andamento reale differisce Fig. 2.5 da quello teorico alle basse temperature. La sezione d'urto infatti è influenzata dalla temperatura in quanto alle basse temperature si fanno sentire di più le forze repulsive che riducono l'entità degli urti. La sezione d'urto geometrica viene quindi corretta e opportunamente maggiorata. Si adotta a tale proposito la **relazione di Sutherland**:

$$\sigma = \sigma_0 \left( 1 + \frac{\chi}{T} \right) \quad (2.23)$$

La formula adottata per  $\mu$  è allora quella di Sutherland:

$$\mu = S \frac{T^{\frac{3}{2}}}{T + \chi} \quad (2.24)$$

in cui  $S$  è la costante di Sutherland.

Gas	S	T
$O_2$	$1.65 \cdot 10^{-6}$	110
$N_2$	$1.35 \cdot 10^{-6}$	102
$H_2$	$0.65 \cdot 10^{-6}$	71
$He$	$1.52 \cdot 10^{-6}$	98
$CO$	$1.40 \cdot 10^{-6}$	105
$CO_2$	$1.56 \cdot 10^{-6}$	233
Aria	$1.46 \cdot 10^{-6}$	110

Tabella 2.2: Costante di Sutherland per gas vari.

## Capitolo 3

# Particolarizzazione delle equazioni di Navier-Stokes

### 3.1 Flusso incompressibile

Il flusso incompressibile ( $\rho = cost$ ) è caratterizzato dalla divergenza nulla del vettore velocità :

$$\nabla \vec{V} = 0$$

Riprendendo la Eq. (2.10):

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \gamma_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \Big|_{(i=1,2,3)}$$

e la Eq. (2.17):

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \vec{V} \right) + \zeta \delta_{ij} \nabla \vec{V}$$

che si semplifica:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

ottenendo così :

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \gamma_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \Big|_{(i=1,2,3)}$$

espandendo la notazione tensoriale:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_i \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_i \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \gamma_i + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_i} \right] \Big|_{(i=1,2,3)}$$

e riorganizzando:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \overbrace{\left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)}^{\nabla \vec{V}=0} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \gamma_i + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overbrace{\left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)}^{\nabla \vec{V}=0} \right] \Big|_{(i=1,2,3)}$$

quindi:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \gamma_i + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \right] \Big|_{(i=1,2,3)}$$

e in definitiva la forma scalare:

$$\begin{aligned}
 \rho \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + \vec{V} \nabla u_1 \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \gamma_1 + \mu \nabla^2 u_1 \\
 \rho \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} + \vec{V} \nabla u_2 \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \gamma_2 + \mu \nabla^2 u_2 \\
 \rho \left( \frac{\partial u_3}{\partial t} + \vec{V} \nabla u_3 \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x_3} + \gamma_3 + \mu \nabla^2 u_3 \\
 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

e vettoriale (assumendo l'espressione espansa della derivata totale della velocità ):

$$\begin{aligned}
 \rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \operatorname{grad} \vec{V} \right) &= -\nabla P + \vec{\gamma} + \mu \nabla^2 \vec{V} \\
 \nabla \vec{V} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
 \rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \omega \wedge \vec{V} + \frac{1}{2} \nabla (\vec{V} \vec{V}) \right) &= -\nabla P + \vec{\gamma} + \mu \nabla^2 \vec{V} \\
 \nabla \vec{V} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Le Eq. (3.1) costituiscono un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali nelle incognite  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $P$ , per il quale non è tuttora possibile stabilire l'esistenza dell'unicità della soluzione.

### 3.1.1 Espressione in coordinate cilindriche

L'equazione vettoriale di Navier-Stokes può essere espressa in coordinate cilindriche facendo riferimento ai richiami nel Cap. A.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} &= \vec{i}_r \left[ \frac{\partial u_r}{\partial t} \right] + \vec{i}_\theta \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right] + \vec{i}_z \left[ \frac{\partial u_z}{\partial t} \right] \\
\vec{\omega} \wedge \vec{V} &= \vec{i}_r \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} \right] + \\
&\quad + \vec{i}_\theta \left[ u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{1}{2r} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right] + \\
&\quad + \vec{i}_z \left[ u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial z} \right] + \\
\frac{1}{2} \nabla(\vec{V}^2) &= \vec{i}_r \left[ \overbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial r}}^{\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial r}} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial u_r^2}{\partial r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r^2}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_z^2}{\partial r} \right] + \right. \\
&\quad + \vec{i}_\theta \left[ \overbrace{\frac{1}{2r} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial \theta}}^{\frac{1}{2r} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial \theta}} \left[ \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r^2}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_\theta^2}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_z^2}{\partial \theta} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \vec{i}_z \left[ \overbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial z}}^{\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial z}} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial u_r^2}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta^2}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_z^2}{\partial z} \right] \right] \right. \\
\nabla P &= \vec{i}_r \left[ \frac{\partial P}{\partial r} \right] + \vec{i}_\theta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] + \vec{i}_z \left[ \frac{\partial P}{\partial z} \right] \\
\nabla^2 \vec{V} &= \vec{i}_r \left[ \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \\
&\quad + \vec{i}_\theta \left[ \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] + \vec{i}_z \left[ \nabla^2 u_z \right] \\
\nabla \vec{V} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + \vec{V} \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) &= \gamma_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
\rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \vec{V} \nabla u_\theta + \frac{u_\theta u_r}{r} \right) &= \gamma_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\
\rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + \vec{V} \nabla u_z \right) &= \gamma_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \nabla^2 u_z \\
\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

## 3.2 Considerazioni

È interessante fare un confronto tra lo studio che si effettua in aerodinamica, con le approssimazioni adottate, e le equazioni ora ricavate.

1. In aerodinamica oltre alle forze di volume, sono trascurati gli sforzi viscosi e la condizione al contorno adottata è quella di **tangenza**; a causa degli sforzi di attrito invece la viscosità impone che il fluido a contatto di una superficie sia “fermo”. Tale condizione viene chiamata **condizione di aderenza**. Viene introdotto il concetto di **strato limite**, ossia la zona adiacente alla superficie solida all’interno della quale il campo di velocità del fluido è influenzato dalle forze viscosi.
2. La non linearità delle equazioni di Navier-Stokes porta al risultato per cui, se  $\vec{V}$  è un campo di velocità che le soddisfa, non è detto che altrettanto faccia il campo  $-\vec{V}$ : da qui si intuisce come mai per spegnere un fiammifero si debba soffiare piuttosto che aspirare aria. Questo implica anche la non sovrapposibilità delle soluzioni elementari, cosa che si fa in aerodinamica con la sovrapposizione delle singolarità.
3. Le ipotesi di stazionarietà, incompressibilità, irrotazionalità adottate in aerodinamica portano alla semplificazione delle equazioni di Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \rho \frac{V^2}{2} + P = cost \\ \vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{V} = 0 \\ \nabla \vec{V} = 0 \end{cases}$$

Per giustificare l'ipotesi di irrotazionalità in aerodinamica si ricorda *l'ipotesi di Kutta*. In base a questa al vortice che porta il punto di arresto posteriore sul bordo di fuga corrisponde un vortice uguale e contrario rilasciato in fase di accelerazione da 0 alla  $V_\infty$ . Questo vortice viene abbandonato dal profilo allontanandosene sempre più .

### 3.3 Equazioni di Navier-Stokes adimensionate

L'adimensionalizzazione delle equazioni di Navier-Stokes permette di apprezzare l'influenza dei fenomeni viscosi in rapporto alle forze di altra natura in gioco.

L'adimensionalizzazione si effettua attraverso l'introduzione dei gruppi adimensionali:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L} & y^* &= \frac{y}{L} & z^* &= \frac{z}{L} \\ u^* &= \frac{V_\infty}{L} & v^* &= \frac{v}{V_\infty} & w^* &= \frac{w}{V_\infty} \\ t^* &= \frac{t}{L/V_\infty} & p^* &= \frac{p}{\rho V_\infty^2} & \gamma^* &= \frac{\gamma L}{\rho V_\infty^2} \end{aligned}$$

Con le grandezze adimensionalizzate le equazioni diventano:

$$\begin{cases} \rho \frac{V_\infty^2}{L} \left( \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \vec{V}^* \nabla u_i^* \right) = -\rho \frac{V_\infty^2}{L} \left( \frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \gamma_i^* \right) + \mu \frac{V_\infty}{L^2} \nabla^2 u_i^* \Big|_{(i=1,2,3)} \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3^*} = 0 \end{cases}$$

Dividendo per  $(\rho V_\infty^2)/L$  le equazioni diventano adimensionali:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \vec{V}^* \nabla u_i^* = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \gamma_i^* + \frac{\mu}{V_\infty L \rho} \nabla^2 u_i^* \Big|_{(i=1,2,3)} \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3^*} = 0 \end{cases}$$

Compare un gruppo adimensionale:

$$\boxed{\mathcal{Re} = \frac{\rho V_\infty L}{\mu}} \quad (3.5)$$

che rappresenta il **numero di Reynolds**.

Il numero di Reynolds rappresenta il rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscosi in gioco. Introducendo la **viscosità cinematica**:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

esso può essere espresso anche come:

$$\mathcal{Re} = \frac{V_\infty L}{\nu}$$

Le equazioni di Navier-Stokes adimensionate diventano:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \vec{V}^* \nabla u_i^* &= -\frac{\partial P^*}{\partial x_i^*} + \gamma_i^* + \frac{1}{\mathcal{Re}} \nabla^2 u_i^* \Big|_{(i=1,2,3)} \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} + \frac{\partial u_3^*}{\partial x_3^*} &= 0 \end{aligned}} \quad (3.6)$$

Da queste è evidente che a numeri di Reynolds elevati i fenomeni viscosi diventano trascurabili rispetto alle forze d'inerzia. Queste ultime sono quelle preponderanti che in tal caso governano il fenomeno.

# Capitolo 4

## Moto stazionario tra due piastre

### 4.1 Introduzione

Si analizzeranno ora le particolarizzazioni delle equazioni di Navier-Stokes relativamente alle condizioni di moto tra due piastre piane parallele distanti  $a$ . Il moto è monodimensionale:

$$\begin{cases} u_2 &= 0 \\ u_3 &= 0 \end{cases}$$

Le condizioni di moto considerate sono:

**Flusso alla Couvette:** in questo tipo di moto il fluido viene messo in moto per effetto del trascinamento dovuto al movimento di una delle due piastre con velocità  $U$ ; il moto non avviene a causa di un gradiente di pressione.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x_1} &= 0 \\ u_1 &= u_1(x_2) \\ u_1(0) &= 0 \\ u_1(a) &= U \end{cases}$$

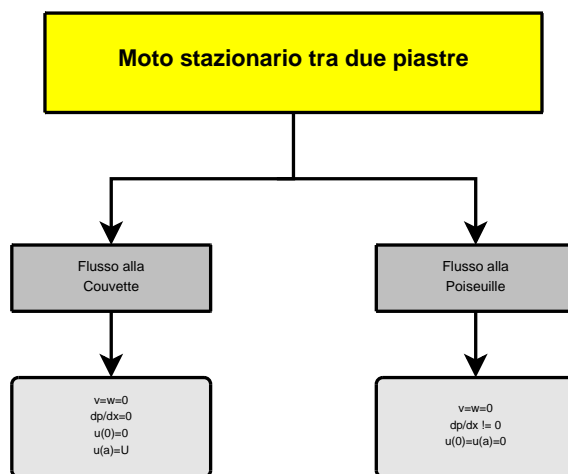


Figura 4.1: Flussi di corrente tra due piastre piane

**Flusso alla Poiseuille:** in questo tipo di moto il fluido si muove per effetto di un gradiente di pressione tra le piastre ferme.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x_1} \neq 0 \\ u_1(0) = 0 \\ u_1(a) = 0 \end{array} \right.$$

Le condizioni di stazionarietà ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ), monodimensionalità ( $u_1 = u_1(x_2)$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = 0$ ), unite al trascurare le forze di volume ( $\vec{\gamma} = 0$ ) semplificano

le Eq. (3.1):

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x_2}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$$

L'equazione del moto tra due lastre piane è quindi:

$$\frac{dP}{dx_1} = \mu \frac{d^2 u_1}{dx_2^2}$$

Affinché questa abbia senso dovrà essere:

$$\boxed{\frac{dP}{dx_1} = \mu \frac{d^2 u_1}{dx_2^2} = K_1} \quad (4.1)$$

La prima parte della Eq. (4.1) porta alla soluzione:

$$P = K_1 x + K_2$$

in cui:

$$K_1 = \frac{dP}{dx_1}$$

La seconda parte della Eq (4.1) diventa:

$$\mu \frac{d^2 u_1}{dx_2^2} = K_1$$

che risulta:

$$u_1(x_2) = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx_1} \frac{x_2^2}{2} + C_1 x_2 + C_2$$

Essendo in generale  $u_1(0) = 0$  e  $u_1(a) = U$ :

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \frac{U}{a} - \frac{dP}{dx_1} \frac{1}{\mu} \frac{a}{2}$$

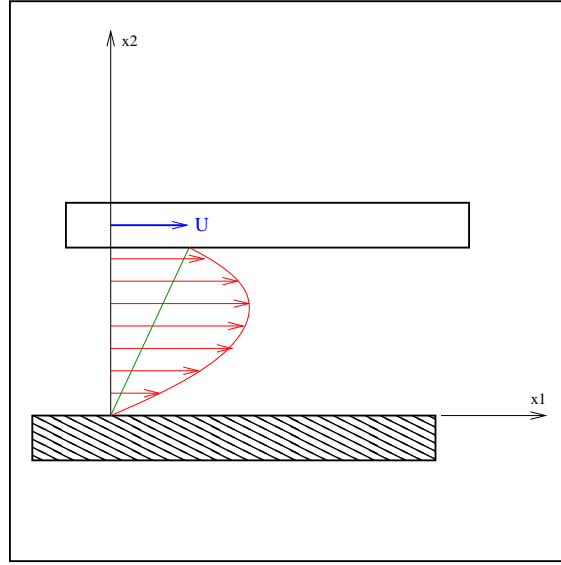


Figura 4.2: Profilo di velocità tra due piastre

e in definitiva:

$$u(y) = \frac{dP}{dx} \frac{1}{2\mu} y^2 + \left( \frac{U}{a} - \frac{dP}{dx} \frac{a}{2\mu} \right) y \quad (4.2)$$

Il profilo dell'atto di moto può essere visto come la somma dei profili di moto alla Couette e alla Poiseuille. La velocità massima si raggiungerà oltre la metà del meato:

$$\frac{du}{dy} = 0$$

$$y_{(U_{max})} = \frac{a}{2} - \frac{\mu U}{a \frac{dP}{dx}}$$

## 4.2 Moto alla Couvette

La Eq. (4.2) diventa:

$$u(y) = \frac{U}{a} y \quad (4.3)$$

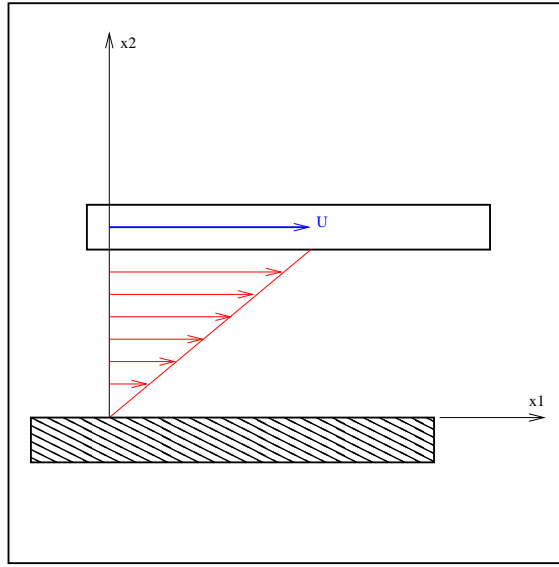


Figura 4.3: Profilo di velocità Couvette

### 4.3 Moto alla Poiseuille

La Eq. (4.2) diventa:

$$u(y) = \frac{dP}{dx} \frac{1}{2\mu} (y^2 - a y) \quad (4.4)$$

Il valore massimo di velocità si ha quando:

$$\frac{du}{dy} = 0$$

per:

$$y = \frac{a}{2}$$

come era intuibile, e vale:

$$U_{max} \left( \frac{a}{2} \right) = -\frac{a^2}{8\mu} \frac{dP}{dx}$$

in cui il segno “meno” tiene conto del fatto che il gradiente di pressione negativo favorisce il moto del fluido con velocità positiva (concorde cioè con il verso del sistema di riferimento).

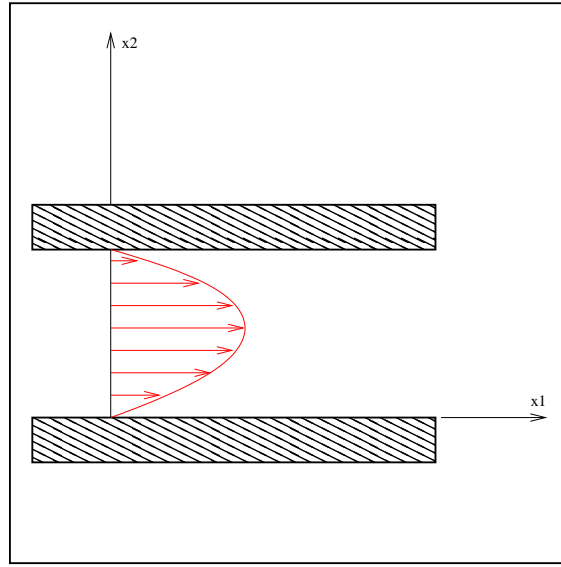


Figura 4.4: Profilo di velocità Poiseuille

Il valore medio della velocità vale invece:

$$\bar{U} = \frac{1}{a} \int_0^a u(y) dy$$

$$\bar{U} = \frac{dP}{dx} \frac{1}{2\mu} \left[ \frac{y^3}{3} - a \frac{y^2}{2} \right]_0^a$$

$$\bar{U} = -\frac{a^2}{12\mu} \frac{dP}{dx}$$

Si nota allora che:

$$U_{max} = \frac{3}{2} \bar{U}$$

Il valore dello sforzo tangenziale a parete:

$$\tau_p = \mu \left( \frac{du_1}{dy} \right)_{y=0}$$

in valore assoluto:

$$\tau_p = \mu \frac{dP}{dx} \frac{1}{2\mu} a$$

Sostituendo in questa l'espressione del gradiente di pressione ricavato dall'espressione della velocità media presa in valore assoluto:

$$\tau_p = \frac{6 \bar{U} \mu}{a}$$

## 4.4 Coefficiente di pressione Poiseuille

Si può calcolare il gradiente di pressione necessario a far scorrere il fluido tra le due piastre.

$$\bar{U} = \frac{a^2}{12\mu} \frac{\Delta P}{L}$$

Dalla relazione sopra con semplici passaggi si ottiene:

$$\frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho\bar{U}^2} = \frac{L}{a} \frac{24}{Re_a}$$

in cui si vede che il  $\Delta P$  è inversamente proporzionale al  $Re_a$  calcolato rispetto all'altezza  $a$  del meato.

## 4.5 Separazione laminare

Il moto tra due piastre piane può essere visto come una combinazione dei due casi *Couvette* e *Poiseuille*. È particolarmente interessante valutare l'influenza del contributo del gradiente di pressione. In particolare gradienti positivi di pressione tendono a rallentare il flusso e a modificarne il profilo. Qualora il fluido fosse trascinato verso gradienti di pressione positivi, come avviene ad esempio sull'extradosso di un profilo alare dopo il punto di massima ordinata, il profilo di velocità nello strato limite si altererebbe al punto che, per un valore opportuno di  $dP/dx$ , vicino alla superficie di contatto il fluido invertirebbe la sua velocità determinando il distacco della vena fluida. Un criterio per stabilire la separazione è quello di valutare la situazione in cui a parete, il profilo di velocità ha pendenza nulla. Si avrebbe in quel punto a parete l'annullamento della  $\tau_p$ . Ricordando la Eq. (4.2) e derivandola a parete:

$$\tau_p = \mu \left( \frac{dP}{dx} \right)_p = 0$$

$$\tau_p = \mu \left( \frac{U}{a} - \frac{dP}{dx} \frac{a}{\mu} \right) = 0$$

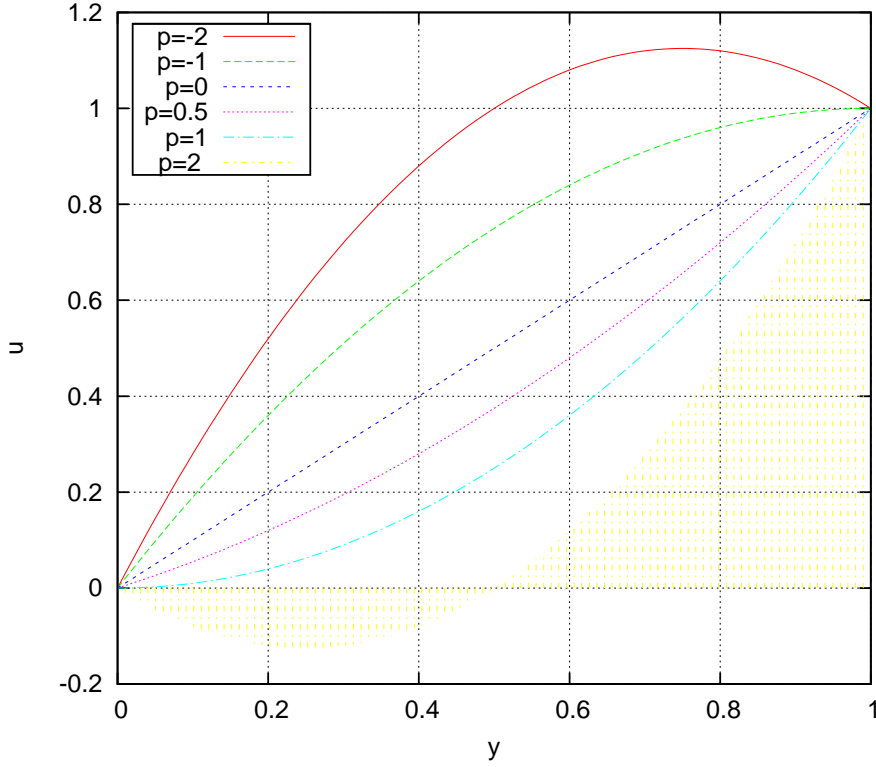


Figura 4.5: Andamento della velocità con  $\frac{dP}{dx}$ .

Il valore di gradiente di pressione che determina la separazione risulterebbe quindi:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{2U\mu}{a^2}$$

Nella Fig. 4.5 si nota l'andamento qualitativo del profilo di pressione con il gradiente di pressione.

## 4.6 Tubo con flusso alla Poiseuille

Si semplificheranno le Eq. (3.4) con le ipotesi:

$$\begin{cases} u_z = u_z(r) \\ u_\theta = 0 \\ u_r = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} \neq 0 \end{cases}$$

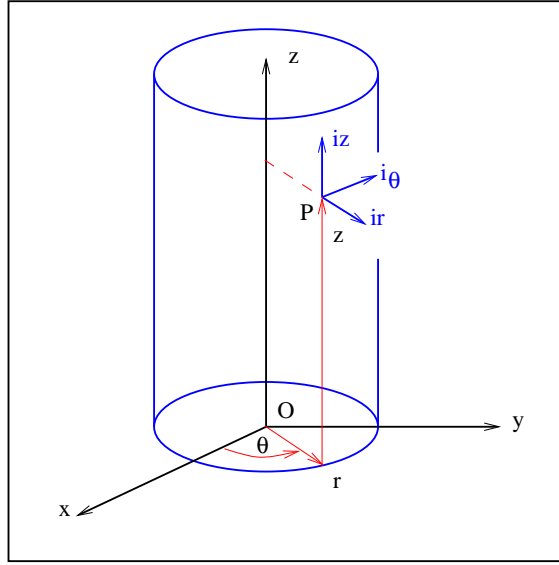


Figura 4.6: Il tubo in coordinate cilindriche.

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r}$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

dalle quali si vede che la pressione è funzione della sola coordinata  $z$ :

$$\frac{dP}{dz} = \mu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

L'equazione sopra ha senso solo se:

$$\frac{dP}{dz} = \mu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \text{cost}$$

Si vede quindi che la pressione ha un andamento lineare, decrescente se il fluido si muove nel verso positivo delle  $z$ .

$$P = k_1 z + k_2$$

Se si ragiona in termini di pressione relativa si può porre  $k_2 = 0$

$$P = k_1 z$$

con:

$$k_1 = \frac{dP}{dz}$$

Si può ricavare l'andamento della velocità :

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{dP}{dz} \frac{1}{\mu} = \mathcal{B}$$

con le condizioni al contorno di aderenza a parete e di simmetria cilindrica del profilo di velocità :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_z(R) = 0 \\ \left( \frac{du_z}{dr} \right)_{r=0} = 0 \end{array} \right.$$

L'equazione sopra può essere ricondotta ad una “*equazione lineare*”<sup>1</sup> del primo ordine:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ y' = -\frac{1}{r} y + \mathcal{B} \end{array} \right.$$

$$y' + \frac{1}{r} y = \mathcal{B}$$

$$dy + \frac{1}{r} y dr = \mathcal{B} dr$$

L'equazione lineare va risolta cercando una funzione ausiliaria  $I(r)$  che moltiplicata per il primo membro dell'equazione dia un differenziale esatto:

$$d[I(r)y] = I(r)dy + I(r) \frac{1}{r} y dr$$

quindi:

$$y dI(r) + I(r) dy = I(r) dy + I(r) \frac{1}{r} y dr$$

---

<sup>1</sup>Da non confondere con *equazione differenziale lineare nelle variabili x e y*. Vedi [1] pag.25.

$$y \, dI(r) = I(r) \frac{1}{r} y \, dr$$

e imponendo la condizione  $y \neq 0$ :

$$\frac{dI(r)}{I(r)} = \frac{dr}{r}$$

che integrata da:

$$I(r) = r$$

Moltiplicando l'equazione di partenza per  $I(r)$ :

$$r \, dy + r \frac{1}{r} y \, dr = r \, dr \, \mathcal{B}$$

$$d[ry] = r \, dr \, \mathcal{B}$$

che viene facilmente integrata:

$$r \, y = \mathcal{B} \frac{r^2}{2} + C$$

$$y = \mathcal{B} \frac{r}{2} + \frac{C}{r}$$

La costante di integrazione viene calcolata imponendo l'annullamento della derivata della velocità, ossia  $y$ , per  $r \rightarrow 0$ . Si vede che deve essere  $C = 0$ .

$$y = \mathcal{B} \frac{r}{2}$$

Procedendo alla successiva integrazione:

$$u_z = \mathcal{B} \frac{r^2}{4} + C$$

La costante  $C$  si ottiene imponendo l'annullarsi della velocità a parete  $u_r(R) = 0$ :

$$u_z = \frac{\mathcal{B}}{4} (r^2 - R^2)$$

$$\boxed{u_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} (r^2 - R^2)} \quad (4.5)$$

La velocità massima si ha ovviamente al centro del condotto:

$$U_z^{MAX} = - \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} R^2$$

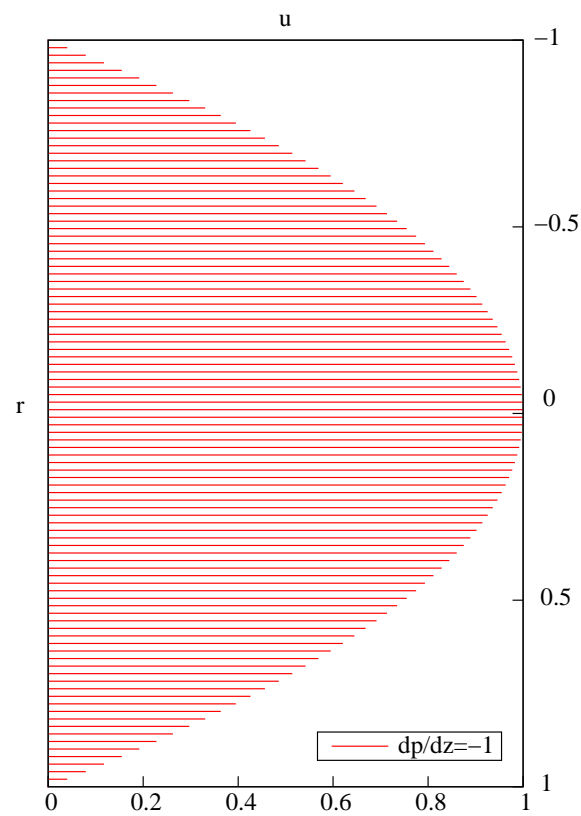


Figura 4.7: Profilo di velocità nel tubo Poiseuille.

La velocità media nel condotto:

$$\pi R^2 \bar{U} = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} \int_0^R [(r^2 - R^2) 2\pi r] dr$$

che elaborata porta a:

$$\bar{U} = \frac{U_z^{MAX}}{2}$$

Il valore dello sforzo tangenziale a parete:

$$\tau_p = \mu \left( \frac{du_z}{dr} \right)_{r=R}$$

$$\tau_p = \frac{dP}{dz} \frac{R}{2}$$

Sostituendo in questa l'espressione del gradiente di pressione ricavato dall'espressione della velocità massima presa in valore assoluto:

$$\tau_p = \frac{4\bar{U}\mu}{R}$$

### Coefficiente di pressione nel tubo Poiseuille

$$\Delta P \pi R^2 = \tau_p 2\pi R L$$

$$\frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho\bar{U}^2} = \frac{4\tau_p L}{R\rho\bar{U}^2}$$

sostituendo l'espressione della  $\tau_p$ :

$$\frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho\bar{U}^2} = \frac{64}{Re_D} \frac{L}{D}$$

Anche nel tubo esiste un limite di applicabilità delle equazioni sopra che è di  $Re \simeq 2300$ .

## 4.7 Considerazioni

I moti qui considerati sono moti rotazionali:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{dP}{dx} \frac{1}{2\mu} y^2 + \left( \frac{U}{a} - \frac{dP}{dx} \frac{a}{2\mu} \right) y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = - \left[ \frac{dP}{dx} \frac{1}{\mu} y + \left( \frac{U}{a} - \frac{dP}{dx} \frac{a}{2\mu} \right) \right] \vec{k}$$

Questi tipi di campi di velocità si realizzano fisicamente per valori di:

$$Re < 1500$$

per moto tra pareti e:

$$Re < 2300$$

per moto in tubo. Al di sotto di questo limite il flusso è *laminare*, ossia non si ha un rimescolamento in seno al fluido. I fenomeni viscosi sono dovuti al solo trasporto di quantità di moto per effetto dei moti di vibrazione termici delle molecole e non per effetti di rimescolamento turbolento.

# Capitolo 5

## Moto ed arresto impulsivo di lastra piana

### 5.1 Moto impulsivo: I problema di Stokes

Si studia il problema di una lastra piana parallela all'asse  $x$  che viene istantaneamente portata ad una velocità  $U$ , che poi rimane costante, al tempo  $t = 0$ . Si tratterà sempre di flusso incompressibile senza peso. Le Eq. (3.1):

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \nabla u \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \gamma_x + \mu \nabla^2 u$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \nabla v \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \gamma_y + \mu \nabla^2 v$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \nabla w \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \gamma_z + \mu \nabla^2 w$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

vanno semplificate introducendo le seguenti ipotesi:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u(y, t) \\ v = 0 \\ w = 0 \\ p = P(y, t) \end{array} \right.$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \nabla^2 u$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

cioè :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

Dalla seconda si deduce che il campo di pressione è ovunque costante e pari a quello del fluido in quiete. La prima equazione è quella che deve essere risolta con le condizioni iniziali:

$t < 0$	$u = 0$
$t \geq 0$	$\frac{u = U \quad y = 0}{u = 0 \quad y = \infty}$

L'equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

va risolta ricorrendo alla adimensionalizzazione delle variabili ed al teorema di Buckingham (vedi App. ??).

Si vede che la relazione scritta sopra lega **quattro** grandezze:

$$f(u, \nu, y, t) = 0$$

ma a loro volta queste dipendono solo da **due** grandezze fondamentali:

$$f(u, \nu, y, t) \rightarrow [L] [T]$$

lunghezza e tempo. In base al teorema di Buckingham l'equazione sopra può essere scritta in funzione di due gruppi adimensionali opportunamente scelti:

$$\begin{cases} u^* = \frac{u}{U} \\ \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \end{cases} \quad (5.1)$$

Sottintendendo che la  $u$  sia adimensionata, tralasciando cioè il simbolo  $*$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{du}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} \\ &= - \frac{du}{d\eta} \frac{1}{2t} \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \\ &= - \frac{du}{d\eta} \frac{\eta}{2t} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{du}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} \\ &= \frac{du}{d\eta} \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{d^2 u}{d\eta^2} \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \frac{d\eta}{dy} \\ &= \frac{d^2 u}{d\eta^2} \frac{1}{4\nu t} \end{aligned}$$

l'equazione diventa:

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + 2\eta \frac{du}{d\eta} = 0 \quad (5.2)$$

con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} u(\eta = \infty) = 0 \\ u(\eta = 0) = 1 \end{cases}$$

Ci si è ricondotti anche in questo caso (Cf.ta Sez. 4.6) ad una equazione lineare ma omogenea. Le soluzioni fornite forniscono un profilo unico di velocità che si riproduce similmente a se stesso nel tempo. Infatti la  $u$  sarà una funzione di  $\eta$ , a sua volta funzione nell'istante della  $y$  e scalata con  $\sqrt{\nu t}$ . Si procede come nella Sez. 4.6.

$$\begin{cases} u' = y \\ y' + 2 \eta y = 0 \end{cases}$$

Si cerca una funzione ausiliaria  $I(\eta)$  tale che  $d[I(\eta) y]$  sia il differenziale del primo membro moltiplicato per la  $I(\eta)$  stessa:

$$dy + 2 \eta y d\eta = 0$$

$$y dI + I dy = I dy + 2 I \eta y d\eta$$

$$y dI = 2 I \eta y d\eta$$

Imponendo  $y \neq 0$ :

$$dI = 2 I \eta d\eta$$

$$\frac{dI}{I} = 2 \eta d\eta$$

che risolta fornisce a meno di una costante:

$$\ln I = \eta^2$$

quindi la  $I(\eta)$  cercata vale:

$$I = e^{\eta^2}$$

Sostituita nella equazione da risolvere:

$$e^{\eta^2} dy + y e^{\eta^2} 2 \eta d\eta = 0$$

$$d[y e^{\eta^2}] = 0$$

$$y e^{\eta^2} = \mathcal{C}$$

$$y = \mathcal{C} e^{-\eta^2}$$

Ricordando che  $y = u'$ :

$$u' = \mathcal{C} e^{-\eta^2}$$

che integrata fornisce il profilo adimensionato cercato:

$$u^* = u^*(\eta = 0) + \int_0^\eta \mathcal{C} e^{-z^2} dz$$

Tenendo conto delle condizioni al contorno per  $\eta = 0$  si ottiene:

$$u^* = 1 + \int_0^\eta \mathcal{C} e^{-z^2} dz$$

La costante  $\mathcal{C}$  può essere calcolata imponendo la condizione al contorno per  $\eta \rightarrow \infty$  e riconoscendo nell'integrale l'espressione della funzione errore  $\text{erf}(\eta)$  (Vedi [2] [585], [590], e Tav. 1045).

$$\begin{aligned} \text{erf}(\eta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz \\ \lim_{\eta \rightarrow \infty} u^*(\eta) &= 1 + \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^\eta \mathcal{C} e^{-z^2} dz = 0 \\ 1 + \mathcal{C} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz &= 0 \\ 1 + \mathcal{C} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz &= 0 \\ 1 + \mathcal{C} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{2} \frac{1}{2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\eta}^{+\eta} e^{-z^2} dz &= 0 \\ 1 + \mathcal{C} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{2} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \int_{-\eta}^{+\eta} e^{-z^2} dz &= 0 \\ 1 + \mathcal{C} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{2} \lim_{\eta' \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \int_{-\eta'}^{+\eta'} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= 0 \\ 1 + \mathcal{C} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{\eta' \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \int_{-\eta'}^{+\eta'} e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= 0 \\ \mathcal{C} &= - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

Si ottiene allora che il profilo della velocità adimensionata è dato proprio dalla funzione  $u^* = \text{erfc}(\eta)$ :

$$\boxed{u^*(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz} \quad (5.3)$$

ossia:

---

<sup>0</sup>Si ottiene con semplici passaggi dalla uguaglianza che lega la funzione  $\text{erf}(\eta)$  con l'integrale della probabilità normale:

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \text{erf}\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

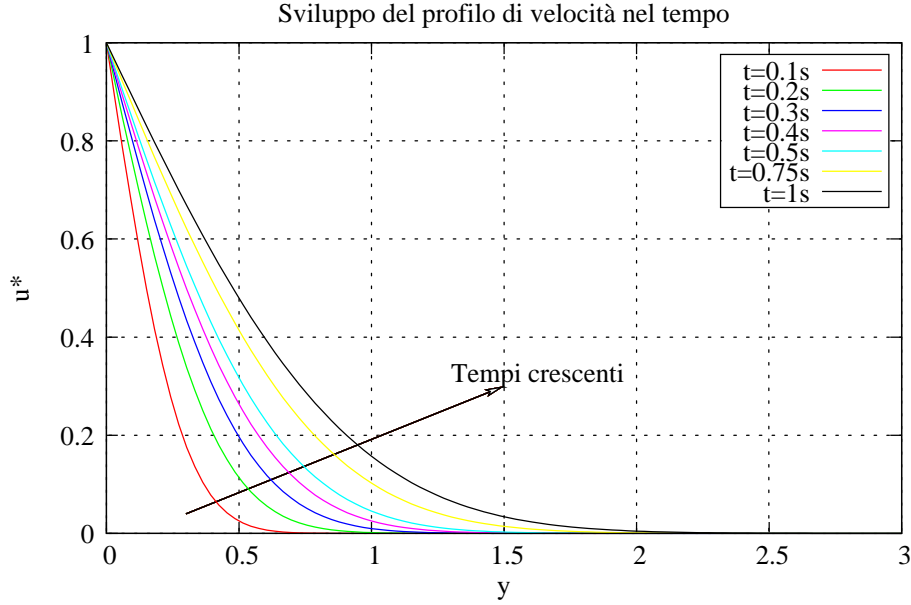


Figura 5.1: Andamento del profilo di velocità adimensionata.

$$\operatorname{erfc}(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$$

Si può a questo punto calcolare lo spessore dello strato limite. Questo corrisponde per definizione alla distanza dal piano alla quale la velocità diventa pari al 99% dell'avelocità di riferimento indisturbata. In questo caso la velocità di riferimento del fluido è nulla, dato che è la piastra a muoversi, per cui si farà riferimento alla distanza alla quale la velocità diventa lo 1% del valore di riferimento.

$$u^* = \frac{u}{U} = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = 0.01$$

$$\operatorname{erf}(\eta) = 0.99$$

Dalla Tab.1045 di [2] si ricava che:

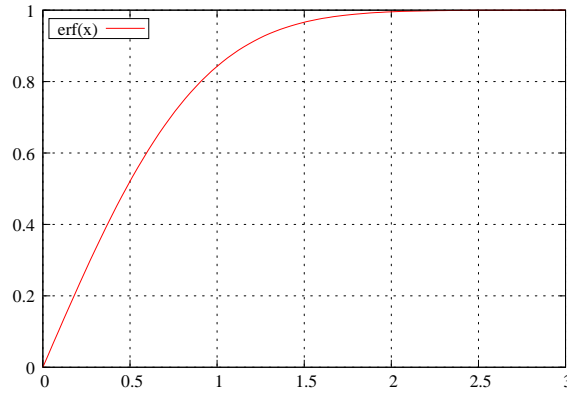
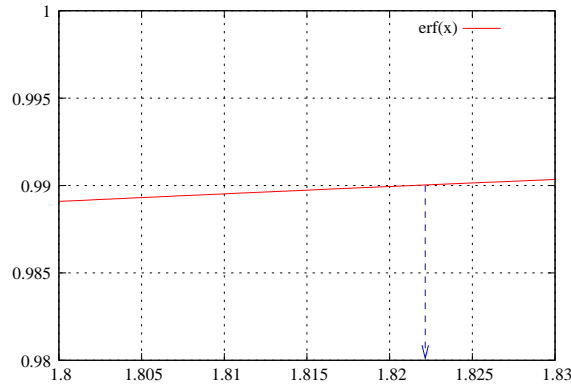
$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-x}^{+x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x = 2.575$$

quindi:

$$\eta_{0.01} = \frac{x}{\sqrt{2}} = 1.821$$

Lo spessore di strato limite si otterrà dalla:

$$\eta_{0.01} = \frac{y_{0.01}}{2\sqrt{\nu t}}$$

Figura 5.2: Andamento grafico di  $\text{erf}(x)$ .Figura 5.3: Ingrandimento andamento grafico di  $\text{erf}(x)$ .

in cui si pone  $\delta_{0.01} = y_{0.01}$ . In definitiva:

$$\boxed{\delta_{0.01} = 3.64 \sqrt{\nu t}} \quad (5.4)$$

Lo spessore dello strato limite aumenta con la radice quadrata del tempo.

## 5.2 Arresto impulsivo

Si esamina la situazione complementare alla precedente. Una lastra piana che è in moto uniforme alla stessa velocità della corrente fluida, e per questo in moto relativo nullo, viene arrestata istantaneamente.

L'equazione del moto è sempre la Eq. (5.2) del caso precedente ma le

condizioni al contorno sono differenti:

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + 2\eta \frac{du}{d\eta} = 0$$

$$\text{c.c.} \quad \begin{cases} u(\eta = \infty) = 1 \\ u(\eta = 0) = 0 \end{cases}$$

La soluzione sarà questa volta:

$$u^*(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz \quad (5.5)$$

ossia:

$$u^*(\eta) = \text{erf}(\eta)$$

il cui andamento grafico è quello della Fig. 5.2.

Lo spessore dello strato limite questa volta sarà dato come da definizione, dalla altezza per cui  $u^* = u/U = 0.99$ . Anche in questo caso lo spessore di strato limite sarà una funzione del tempo e sarà identica alla (5.4):

$$\delta_{0.99} = 3.64 \sqrt{\nu t}$$

### 5.3 Legame tra $\delta$ e $Re$

Dalle relazioni dello spessore dello strato limite trovate nelle sezioni precedenti si può osservare che:

$$\delta \propto \sqrt{\nu t}$$

Tenendo conto che l'ordine di grandezza dei tempi è quello della distanza  $L$  percorsa dal fluido diviso per la velocità  $U_\infty$ :

$$\delta \propto \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}}$$

$$\frac{\delta}{L} \propto \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (5.6)$$

# Capitolo 6

## Equazioni di Prandtl e Von Kàrmàn

### 6.1 Semplificazione di Prandtl delle equazioni di Navier Stokes

Le equazioni di Navier Stokes per fluidi incompressibili, non soggetti a forze di volume, in moto stazionario piano vennero semplificate da Prandtl. Le semplificazioni prendono spunto da valutazioni relative agli ordini di grandezza delle “grandezze fisiche” in gioco e relative alla determinazione delle zone di fluido in cui l’atto di moto è prevalentemente dominato da forze di tipo viscoso o inerziale.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{(I)} \\ \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad \text{(II)} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{(III)} \end{array} \right.$$

**III** La forma della terza relazione, ossia dell’equazione di continuità, suggerisce che le due derivate debbano avere lo stesso ordine di grandezza e che quindi nessuno dei due termini possa essere trascurato rispetto all’altro. Si osserva comunque che l’ordine della grandezza:

$\partial u$  sarà quello della  $U_\infty$  della corrente libera. Questa infatti passa da 0 sulla superficie a  $U_\infty$ ;

$$\partial u \approx U_\infty$$

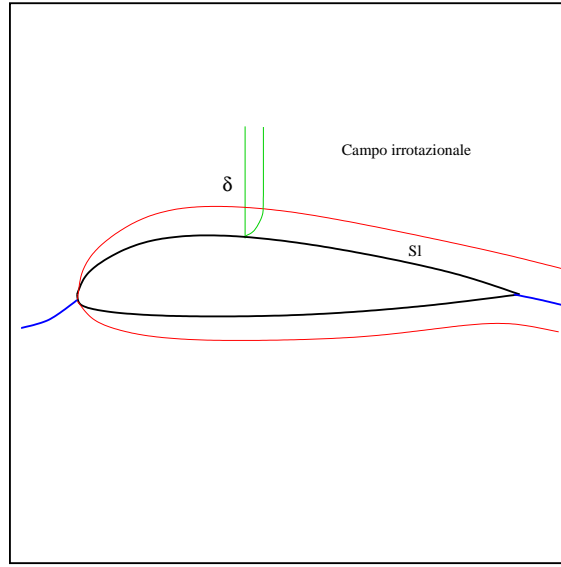


Figura 6.1: Strato limite intorno ad un profilo.

$\partial x$  varia da 0 a  $L$  lunghezza del profilo sul quale scorre la corrente fluida;

$$\partial x \approx L$$

$\partial y$  varia da 0 all'altezza dell' strato limite, ossia il campo di interesse di applicazione delle equazioni che si vogliono risolvere;

$$\partial y \approx \delta$$

$\partial v$  varia da 0 a parete fino ad un valore di riferimento ottenuto componendo le grandezze di riferimento viste sopra.

$$\partial v \approx \frac{U_\infty \delta}{L}$$

**I** La prima equazione può essere scritta in termini di grandezze di riferimento per poter evidenziare i termini trascurabili. Si osserva che l'ordine di grandezza della variazione della pressione lungo l'asse  $x$  può essere valutato utilizzando l'equazione di Bernoulli (ossia NS in campo irrotazionale) nel campo esterno allo strato limite.

$$\frac{\partial P}{\partial x} \approx \rho U^2 \frac{1}{L}$$

$$\rho \frac{U^2}{L} + \rho \frac{U^2 \delta}{L \delta} = \rho U^2 \frac{1}{L} + \mu \frac{U}{L^2} + \mu \frac{U}{\delta^2}$$

dividendo per il gruppo  $\rho \frac{U^2}{L}$ :

$$1 + 1 = 1 + \mu \frac{1}{L\rho U} + \mu \frac{U L}{\delta^2 \rho U^2}$$

$$1 + 1 = 1 + \frac{1}{Re} + \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{1}{Re}$$

In casi di interesse pratico

$$Re \approx 10^6$$

mentre lo spessore dello strato limite  $\delta$  è dell'ordine dei millimetri e  $L$  dei metri (oppure tenendo conto della Rel. (5.6)). Il termine trascurabile è :

$$\frac{1}{Re}$$

corrispondente a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

La (I) equazione diventa:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

**II** Anche la seconda equazione può essere scritta in termini di grandezze di riferimento per poter evidenziare i termini trascurabili.

$$\frac{\partial P}{\partial y} \approx \rho U^2 \frac{1}{\delta}$$

$$\rho \frac{U^2 \delta}{L^2} + \rho \frac{U^2 \delta^2}{L^2 \delta} = \rho U^2 \frac{1}{\delta} + \mu \frac{U \delta}{L^3} + \mu \frac{U \delta}{\delta^2 L}$$

dividendo per il gruppo  $\rho \frac{U^2}{\delta}$ :

$$\frac{\delta^2}{L^2} + \frac{\delta^2}{L^2} = 1 + \frac{1}{Re} \frac{\delta^2}{L^2} + \frac{1}{Re}$$

$$\frac{1}{Re} + \frac{1}{Re} = 1 + \frac{1}{Re^2} + \frac{1}{Re}$$

Si evidenzia l'unico termine non trascurabile che è quello corrispondente al gradiente di pressione. La (II) equazione diventa:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

## 6.1 Semplificazione di Prandtl delle equazioni di Navier Stokes

Questa relazione mostra come la variazione di pressione lungo la  $y$  sia del tutto trascurabile. **La pressione all'interno dello strato limite varierà allora solo lungo la  $x$  e sarà quella imposta dal campo irrotazionale esterno.** La stessa equazione (II), nel campo esterno privo di viscosità fornisce l'**equazione di Bernoulli**, che esprime il gradiente di pressione cercato:

$$\frac{d P_e}{d x} = - \frac{1}{2} \rho \frac{d U^2}{d x} \quad (6.1)$$

Le equazioni di Navier-Stokes, con le esemplificazioni introdotte da Prandtl assumono la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{d P_e}{d x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (6.2)$$

### Considerazioni

- Le ipotesi introdotte da Prandtl trasformano le equazioni di Navier-Stokes, di tipo ellittico, in equazioni di tipo parabolico<sup>1</sup>.
- Effetti del gradiente di pressione e della viscosità sull'evoluzione dello strato limite:

– l'equazione di Bernoulli così espressa:

$$\frac{d U}{d x} = - \frac{1}{U} \frac{1}{\rho} \frac{d P_e}{d x}$$

mostra l'effetto qualitativo del solo gradiente di pressione sull'evoluzione dello strato limite. Gli strati più vicini alla parete dotati di velocità minore, a parità di gradiente di pressione, hanno gradienti di velocità maggiore. Se il gradiente di pressione è negativo segue una maggiore accelerazione degli strati bassi ed un minor inspessimento dello strato limite. Il contrario accade per gradienti di pressione positivi: gli strati bassi subiscono una maggiore decelerazione di quelli alti favorendo l'inspessimento dello strato limite;

---

<sup>1</sup>Vedi [qui](#) una classificazione matematica e [\[3\]](#) a pag.16 per una descrizione fisica.

- all’effetto del gradiente di pressione si aggiunge quello della viscosità e della frizione a parete che estrae quantità di moto tendendo ad inspessire lo strato limite;
- gli effetti sopracitati si bilanciano esattamente nello strato limite allorché la velocità esterna accelera proporzionalmente alla coordinata  $x$ .

## 6.2 Risoluzione integrale delle equazioni di Prandtl: equazione di Von Kàrmàn

le equazioni di Prandtl opportunamente integrate permettono di ottenere quella che si chiama equazione di Von Kàrmàn dello strato limite. Questa equazione permette di ottenere delle soluzioni dell’atto di moto nello strato limite nei casi di geometrie non semplici quali la lastra piana, a prescindere dalla natura laminare o turbolenta del moto in cui l’integrazione delle equazioni originarie risulta impossibile. L’equazione di Von Kàrmàn può essere ottenuta dalla elaborazione delle equazioni di Prandtl, oppure scrivendo il bilancio della quantità di moto in un volume di controllo che si estende lungo lo spessore dello strato limite<sup>2</sup>: da qui l’espressione “integrale”.

La prima equazione, ossia quella di continuità delle Eq. (6.2) integrata considerando una distanza  $h > \delta$  costante dalla superficie fornisce:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{\partial u}{\partial x} \\ \int_0^h \frac{\partial v}{\partial y} dy &= - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ v(h) - v(0) &= - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ v(h) &= - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy\end{aligned}\tag{6.3}$$

---

<sup>2</sup>Vedi:

<http://www.see.ed.ac.uk/~johnc/teaching/fluidmechanics4/2003-04/fluids11/momentum.html>

Questa relazione mostra come la presenza di una  $v(h)$  sia dovuta alla variazione della  $u(x)$  durante il moto affinché la portata rimanga immutata attraverso il volume di controllo.

Integrata fino all'estremo  $y$  fornisce invece l'andamento della velocità  $v(y)$ :

$$v(y) = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Si consideri ora la seconda delle Eq. (6.2):

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{d P_e}{d x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

e si sostituisca l'espressione del gradiente di pressione imposto dal campo esterno:

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2} \rho \frac{d U^2}{d x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{d U^2}{d x} &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{d U^2}{d x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \int_0^h \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{d U^2}{d x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy &= \int_0^h \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \\ \int_0^h \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{d U^2}{d x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy &= \int_0^h \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \end{aligned}$$

il terzo termine può essere sviluppato tenendo conto del risultato ottenuto dalla equazione di continuità :

$$\begin{aligned} \int_0^h v \frac{\partial u}{\partial y} dy &= [u v]_0^h - \int_0^h u \frac{\partial v}{\partial y} dy \\ &= - U \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial v}{\partial y} dy \\ &= - U \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy \end{aligned}$$

mentre il secondo membro:

$$\frac{\mu}{\rho} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_h - \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \right] = \frac{1}{\rho} (\tau_h - \tau_p) = - \frac{\tau_p}{\rho}$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned} \int_0^h \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{dU^2}{dx} \right) dy - U \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy &= -\frac{\tau_p}{\rho} \\ \int_0^h \left( \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{dU^2}{dx} \right) dy - U \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy &= -\frac{\tau_p}{\rho} \\ \int_0^h \left( \frac{\partial u^2}{\partial x} - U \frac{dU}{dx} - U \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy &= -\frac{\tau_p}{\rho} \\ \int_0^h \left( -\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{dU}{dx}(U-u) + u \frac{dU}{dx} + U \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy &= \frac{\tau_p}{\rho} \\ \int_0^h \left( -\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{dU}{dx}(U-u) + \frac{\partial(uU)}{\partial x} \right) dy &= \frac{\tau_p}{\rho} \\ \int_0^h \left( \frac{dU}{dx}(U-u) + \frac{\partial(uU-u^2)}{\partial x} \right) dy &= \frac{\tau_p}{\rho} \\ \int_0^h \left( \frac{dU}{dx}(U-u) + \frac{\partial[u(U-u)]}{\partial x} \right) dy &= \frac{\tau_p}{\rho} \end{aligned}$$

Essendo le funzioni integrali sicuramente convergenti l'operazione di derivazione parziale può essere portata fuori dal segno di operazione di integrale<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} \int_0^h (U-u) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h [u(U-u)] dy &= \frac{\tau_p}{\rho} \\ U \frac{dU}{dx} \int_0^h \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[ U^2 \int_0^h \left[ \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \right] dy \right] &= \frac{\tau_p}{\rho} \\ U \frac{dU}{dx} \int_0^h \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy + & \\ + 2 U \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^h \left[ \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \right] dy + U^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \left[ \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \right] dy &= \frac{\tau_p}{\rho} \end{aligned}$$

Definendo:

<sup>3</sup>Si veda:

<http://planetmath.org/encyclopedia/DifferentiationUnderIntegralSign.html>  
<http://www.math.ualberta.ca/~etalvila/papers/diffinal.pdf>.

$\delta^* = \int_0^h \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$	Spessore di spostamento
$\vartheta = \int_0^h \left[\frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right)\right] dy$	Spessore di quantità di moto

l'equazione assume la sua forma:

$$U \frac{dU}{dx} \delta^* + 2 U \frac{dU}{dx} \theta + U^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

$$\boxed{\delta^* U \frac{dU}{dx} + \frac{d(U^2 \vartheta)}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}} \quad (6.4)$$

### 6.2.1 Spessore di spostamento *Displacement thickness*

Si vedrà il significato fisico dello spessore di spostamento:

$$\begin{aligned} \delta^* &= \int_0^h \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \\ \delta^* U \rho &= U \rho \int_0^h \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \\ \delta^* U \rho &= \rho \int_0^h (U - u) dy \end{aligned}$$

Il termine al secondo membro rappresenta la perdita di portata di flusso dovuta alla presenza dei fenomeni viscosi vicino alla parete. Questa perdita di portata di flusso è equivalente ad uno spostamento (ispessimento) della parete della quantità  $\delta^*$  in un fluido ideale a velocità  $U$ .

### 6.2.2 Spessore di quantità di moto *Momentum thickness*

$$\vartheta = \int_0^h \left[\frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right)\right] dy$$

$$\rho \vartheta U U = \rho \int_0^h [u (U - u)] dy$$

Il termine al secondo membro rappresenta la perdita di quantità di moto subita dalla portata vera (con la velocità  $u$ ) a causa dei fenomeni viscosi. Questa perdita di quantità di moto equivale ad avere uno spostamento (ispessimento)  $\vartheta$  della parete nel caso di fluido ideale.

### Considerazioni

I parametri integrali  $\delta^*$  e  $\vartheta$  evidenziano gli effetti della viscosità del fluido, a livello di diminuzione della portata e della diminuzione quantità di moto di questa.

### 6.2.3 Equazione di Von Kàrmàn adimensionata

Introducendo:

$H = \frac{\delta^*}{\vartheta}$	Fattore di forma
$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U^2}$	Coefficiente di attrito

e dividendo per  $U^2$ :

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \delta^* + \frac{2}{U} \frac{dU}{dx} \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} \delta^* + 2 \frac{\vartheta}{U} \frac{dU}{dx} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{2} C_f$$

$$\frac{\vartheta}{U} \frac{dU}{dx} H + 2 \frac{\vartheta}{U} \frac{dU}{dx} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{1}{2} C_f$$

si ottiene l'equazione integrale di Von Kàrmàn in forma adimensionata:

$$\boxed{\frac{\vartheta}{U} \frac{dU}{dx} (H + 2) + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{C_f}{2}} \quad (6.5)$$

### 6.2.4 Equazione di Von Kàrmàn: profilo di velocità lineare

L'equazione di Von Kàrmàn è un potente mezzo per la soluzione di regimi di moto e geometrie più complesse della classica lamina piana. Tuttavia si riporterà comunque un esempio di soluzione della lamina piana i cui valori approssimati, ottenuti ipotizzando un “rozzo” profilo lineare per  $u(y)$ , verranno confrontati con la soluzione esatta di Blasius trattata successivamente. Si rileverà un buon accordo con la soluzione esatta, nonostante la approssimativa ipotesi del profilo di velocità .

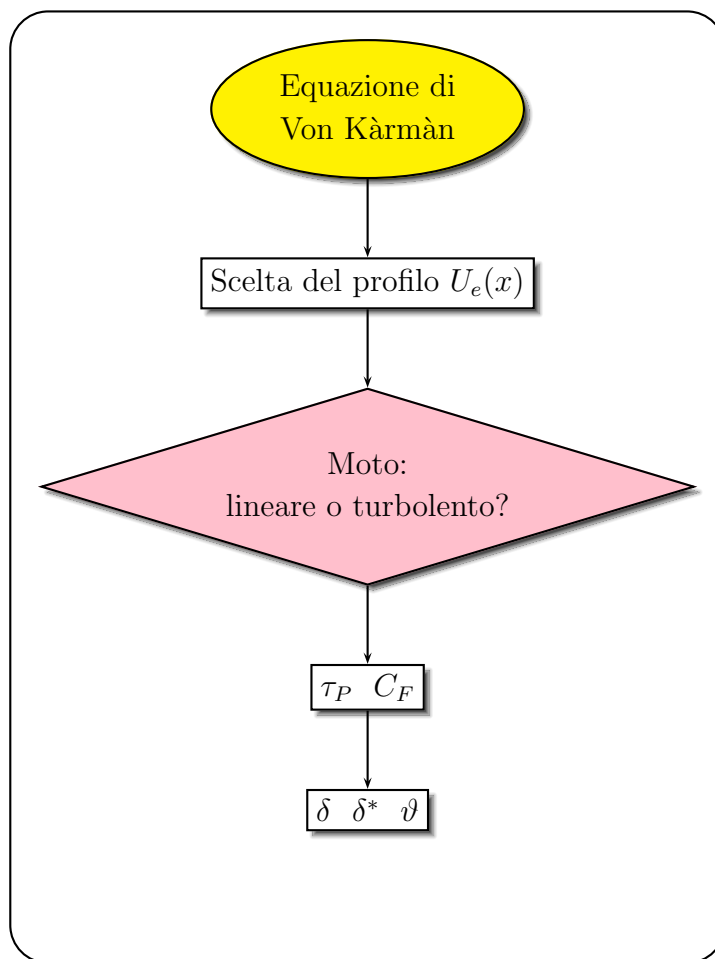


Tabella 6.1: Utilizzo equazione di Von Kàrmàn.

Nella lamina piana è nullo il gradiente di pressione imposto dal campo

esterno per cui sarà altrettanto nullo il gradiente di velocità  $dU/dx$ :

$$\delta^* U \frac{dU}{dx} + \frac{d(U^2 \vartheta)}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

la  $U$  sarà costante lungo la  $x$ :

$$\frac{d(U^2 \vartheta)}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

$$U^2 \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

Si vede come della variazione di quantità di moto del flusso sia responsabile la sola  $\tau$ .

Si scelga a questo punto un profilo ipotetico di velocità , per esempio lineare, per la  $u(y)$ :

$$u(y) = U \frac{y}{\delta}$$

e si ipotizzi un atto di moto laminare, che permette l'utilizzo della espressione di Newton della viscosità :

$$\tau_p = \mu \left( \frac{du}{dy} \right)_p$$

Con queste scelte si ottiene lo spessore di quantità di moto:

$$\vartheta = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{u}{U} \right) dy$$

$$\vartheta = \int_0^\delta \frac{y}{\delta} \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right) dy$$

$$\vartheta = \frac{\delta}{6}$$

lo spessore di spostamento:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{u}{U} \right) dy$$

$$\delta^* = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{y}{\delta} \right) dy$$

$$\delta^* = \frac{\delta}{2}$$

e lo sforzo a parete:

$$\tau_p = \mu \frac{U}{\delta}$$

Si può calcolare lo spessore di strato limite  $\delta$  dalla equazione di Von Kàrmàn:

$$U^2 \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

$$\frac{U^2}{6} \frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu U}{\rho \delta}$$

$$\frac{U}{6} \delta d\delta = \frac{\mu}{\rho} dx$$

$$\frac{U}{12} \delta^2 = \frac{\mu}{\rho} x$$

$$\delta = \sqrt{\frac{12 \mu}{U \rho}} x$$

$$\delta = 3.46 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$\frac{\delta}{x} = 3.46 \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

Lo sforzo tangenziale a parete locale sarà dunque:

$$\tau_p = 0.289 U^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\rho \mu}{x}}$$

lo spessore di spostamento:

$$\delta^* = 1.73 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

lo spessore di quantità di moto:

$$\vartheta = 0.577 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

ed il coefficiente di resistenza della piastra di lunghezza  $L$ :

$$C_f = 0.577 \sqrt{\frac{\mu}{L U \rho}}$$

$$C_f = 0.577 \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$$

Confronto lastra piana Von Kàrmàn $U(y)$ lineare vs Blasius			
	Von Kàrmàn	Blasius	
$\delta_{0.99}$	$3.46 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	Spessore di strato limite
$\delta^*$	$1.73 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$1.7172 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	Spessore di spostamento
$\vartheta$	$0.577 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$0.66 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	Spessore di quantità di moto
$\tau_p$	$0.289 U^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\mu \rho}{x}}$	$0.332 U^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\mu \rho}{x}}$	Frizione a parete
$C_f$	$0.577 \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e_L}}$	$0.664 \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e_L}}$	Coefficiente di attrito

Tabella 6.2: Confronto tra soluzione approssimata ed esatta.

### 6.2.5 Equazione di Von Kàrmàn: metodo di Polhausen

Il metodo di Polhausen è un metodo approssimato in quanto applicato all'equazione di Von Kàrmàn, che si basa sulle approssimazioni di Prandtl, e basato sull'adozione di un profilo di velocità “*a priori*” funzione della variabile adimensionata:

$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

espresso dal polinomio:

$$\varphi(\eta) = \frac{u}{U} = A\eta + B\eta^2 + C\eta^3 + D\eta^4 \quad (6.6)$$

che soddisfa già la condizione di aderenza a parete. Le condizioni al contorno sulla parete e al bordo di strato limite richieste al profilo di velocità sono:

$$\text{c.c.} \left\{ \begin{array}{l} \eta = 1 \left\{ \begin{array}{l} u = U \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \\ \eta = 0 \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \\ \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{dU}{dx} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Le condizioni al contorno per  $\eta = 1$  sono delle condizioni geometriche di ottimo raccordo con il campo esterno. Per  $\eta = 0$ , la prima condizione rappresenta la condizione di aderenza, la seconda rappresenta l'equazione Eq. (6.2) di Von Kàrmàn a parete, la terza rappresenta la condizione di invarianza della pressione con  $y$  data dalla Eq. (6.1) di Bernouilli. Al fine di soddisfare le condizioni al contorno date il polinomio dovrà essere necessariamente di quarto grado. Polhausen introduce il parametro adimensionato:

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU}{dx} = -\frac{\delta^2}{\mu U} \frac{dp}{dx}$$

che tiene conto del campo esterno di velocità e del suo gradiente di pressione. Derivando due volte la 6.6 si ottiene subito la costante  $B$ :

$$\frac{d^2 u/U}{d\eta^2} = 2B + 6C\eta + 12D\eta^2$$

per  $\eta = 0$  dalla seconda c.c. si ottiene:

$$\left( \frac{d^2 u/U}{d\eta^2} \right)_{\eta=0} = \frac{\delta^2}{U\mu} \frac{dp}{dx} = -\lambda = 2B$$

$$B = -\frac{\lambda}{2}$$

Scrivendo le condizioni al contorno per  $\eta = 1$  si ottiene un sistema di tre equazioni che permette di ottenere le costanti rimanenti  $A$ ,  $C$  e  $D$  in funzione di  $\lambda$ :

$$\begin{cases} 1 &= A - \frac{\lambda}{2} + C + D \\ 0 &= A - \lambda + 3C + 4D \\ 0 &= -\lambda + 6C + 12D \end{cases}$$

Risolto il sistema si ottiene:

$$A = 2 + \frac{\lambda}{6}$$

$$C = -2 + \frac{\lambda}{2}$$

$$D = 1 - \frac{\lambda}{6}$$

L'espressione del profilo di velocità diventa:

$$\frac{u}{U} = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) + \lambda \left( \frac{\eta}{6} - \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{2} - \frac{\eta^4}{6} \right)$$

che può anche essere scritta:

$$\frac{u}{U} = \varphi(\eta) = F(\eta) + \lambda G(\eta) \quad (6.7)$$

Si possono calcolare i valori limite che  $\lambda$  può assumere. Il minimo (quindi il massimo valore del gradiente di pressione positivo avverso) si trova imponendo l'annullamento della frizione a parete:

$$\tau_P = \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_P \geq 0$$

$$\mu U \frac{1}{\delta} \left[ (2 - 6\eta^2 + 4\eta^3 + 4\eta^3) + \lambda \left( \frac{1}{6} - \eta + \frac{3}{2}\eta^2 - \frac{4}{6}\eta^3 \right) \right]_{\eta=0} \geq 0$$

$$\mu U \frac{1}{\delta} \left( 2 + \lambda \frac{1}{6} \right) \geq 0$$

$$\boxed{\lambda \geq -12}$$

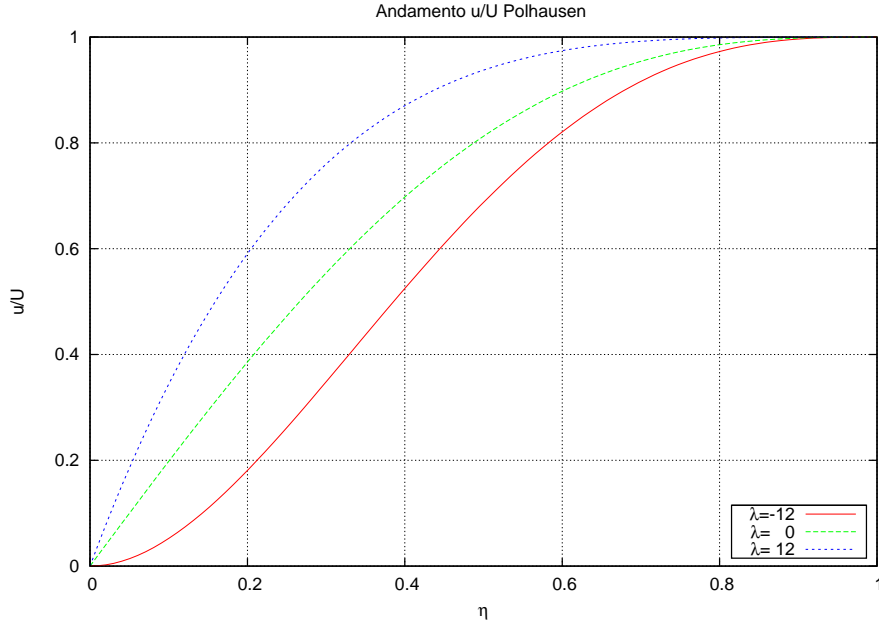


Figura 6.2: Profilo di velocità di Polhausen.

Il valore massimo lo si cerca notando che le condizioni al contorno di raccordo, impongono che la derivata seconda del profilo di velocità debba essere negativa su tutto l'intervallo di variabilità di  $\eta$ , per assicurare la concavità verso il basso:

$$\left( \frac{\partial^2 u/U}{\partial \eta^2} \right)_{0 \leq \eta \leq 1} \leq 0$$

Si perviene alla disequazione di secondo grado:

$$\eta^2(12 - 2\lambda) + \eta(3\lambda - 12) - \lambda \leq 0$$

Avendo già trovato il limite inferiore di  $\lambda$  si studia il caso per  $\lambda > 6$ . Le soluzioni sono:

$$\eta \geq 1$$

e:

$$\eta \leq \frac{-\lambda}{2(6 - \lambda)}$$

Dovendo comunque risultare:

$$\frac{-\lambda}{2(6 - \lambda)} \leq 1$$

allora dovrà essere:

$$\lambda \leq 12$$

### Parametri di strato limite

Svolgendo i calcoli (piuttosto lunghi) si ottengono le espressioni dei parametri di strato limite.

Parametri di strato limite Polhausen		
	Polhausen	
$\delta^*$	$\delta \left( \frac{3}{10} - \frac{\lambda}{120} \right)$	Spessore di spostamento
$\vartheta$	$\delta \left( \frac{37}{315} - \frac{\lambda}{945} - \frac{\lambda^2}{9072} \right)$	Spessore di quantità di moto
$\tau_p$	$\frac{\mu U}{\delta} \left( 2 + \frac{\lambda}{6} \right)$	Frizione a parete

Tabella 6.3: Parametri di s.l. Polhausen.

### Parametri di strato limite per piastra piana

Si ricaveranno i parametri di strato limite per poter confrontare il risultati del metodo di Polhausen con la soluzione esatta di Blasius.

Si ricaveranno lo spessore di spostamento, di quantità di moto e la frizione a parete. Questi verranno poi sostituiti nell'equazione di Von Kàrmàn per ottenere lo spessore di strato limite.

Lo spessore di spostamento risulta:

$$\begin{aligned}
 \delta^* &= \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \\
 &= \int_0^1 (1 - \varphi) \delta d\eta \\
 &= \frac{3}{10} \delta
 \end{aligned}$$

mentre lo spessore di quantità di moto:

$$\begin{aligned}
 \vartheta &= \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \\
 &= \int_0^1 \varphi (1 - \varphi) \delta d\eta \\
 &= \frac{37}{315} \delta
 \end{aligned}$$

La frizione a parete:

$$\begin{aligned}
 \tau_P &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_P \\
 &= \mu U \left( \frac{\partial u/U}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dy} \right)_P \\
 &= \frac{\mu U}{\delta} \left( \frac{\partial u/U}{\partial \eta} \right)_P \\
 &= \frac{2\mu U}{\delta}
 \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni sopra ottenute nella Eq. (6.4) e ricordando che per la lastra piana  $\frac{dU}{dx} = 0 \leftrightarrow \lambda = 0$ :

$$\delta^* U \frac{dU}{dx} + \frac{d(U^2 \vartheta)}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{37}{315} \frac{d(U^2 \delta)}{dx} &= \frac{2\mu U}{\delta \rho} \\ \frac{37}{315} \delta U \frac{dU}{dx} + \frac{37}{315} U^2 \frac{d\delta}{dx} &= \frac{2\mu U}{\delta \rho} \\ \frac{37}{315} U^2 \frac{d\delta}{dx} &= \frac{2\mu U}{\delta \rho} \\ \frac{37}{315} \frac{d\delta^2/2}{dx} &= \frac{2\mu}{U \rho} \\ \frac{d\delta^2/2}{dx} &= \frac{630}{37} \frac{\mu}{U \rho} \\ \delta^2/2 &= \frac{630}{37} \frac{\mu}{U \rho} x \\ \delta^2/2 &= \frac{630}{37} \frac{\mu}{U \rho} x\end{aligned}$$

in definitiva:

$$\frac{\delta}{x} = 5.835 \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e_x}} \quad (6.8)$$

Con l'espressione di  $\delta$  trovata si ottengono i valori cercati:

$$\frac{\delta^*}{x} = 1.75 \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e_x}} \quad (6.9)$$

$$\frac{\vartheta}{x} = 0.685 \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e_x}} \quad (6.10)$$

$$H = 2.55 \quad (6.11)$$

$$\tau_P = 0.343 \sqrt{\frac{\rho \mu}{x}} \quad (6.12)$$

$$C_F = 0.685 \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e_L}} \quad (6.13)$$

Riassumere i risultati in una tabella aiuta a notare le differenze:

Confronto lastra piana Polhausen vs Blasius			
	Polhausen $\lambda = 0$	Blasius	
$\delta$	$5.835 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	Spessore di strato limite
$\delta^*$	$1.75 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$1.7172 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	Spessore di spostamento
$\vartheta$	$0.685 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$0.66 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	Spessore di quantità di moto
$\tau_p$	$0.343 U^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\mu \rho}{x}}$	$0.332 U^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\mu \rho}{x}}$	Frizione a parete
$C_f$	$0.685 \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e_L}}$	$0.664 \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e_L}}$	Coefficiente di attrito

Tabella 6.4: Confronto tra soluzione di Polhausen ed esatta di Blasius.

### 6.2.6 Equazione di Von Kàrmàn: metodo di Thwaites

Il metodo integrale di Thwaites è basato sull'equazione di Von Kàrmàn e sull'assunzione di valori numerici empirici che trovano riscontro nella realtà. È in molti casi un metodo molto accurato. Dato il campo esterno  $U(x)$  si vogliono determinare  $\vartheta(x)$ ,  $\delta^*(x)$  e  $C_F(x)$ . Si riprenda l'Eq. (6.5):

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\vartheta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (H + 2) + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

Volendo integrarla per ottenere l'andamento dello spessore di quantità di moto  $\vartheta$  la si riscrive:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{C_f}{2} - \frac{\vartheta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (H + 2)$$

Si dovrà cercare di mettere in relazione il fattore di forma  $H$  e il coefficiente di attrito a parete  $C_F$  con  $\vartheta$ . L'adimensionalizzazione di  $y$  avverrà ora tenendo in considerazione lo spessore di quantità di moto  $\vartheta$ :

$$\eta = \frac{y}{\vartheta}$$

mentre la velocità adimensionata resterà :

$$U = \frac{u}{U_e}$$

Il profilo di velocità nello strato limite è caratterizzato da:

- $\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0}$  curvatura del profilo a parete, legata alla derivata della velocità esterna  $\frac{dU}{dx}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0} &= \frac{\vartheta^2}{U_e} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{\eta=0} \\ &= \frac{\vartheta^2}{U_e \nu} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{\eta=0} \end{aligned}$$

$$\text{applicando Prandtl a parete} = \frac{\vartheta^2}{U_e \nu} \frac{dp}{dx}$$

$$\begin{aligned} \text{e Bernouilli} &= - \frac{\vartheta^2}{U_e \nu} U_e \frac{dU_e}{dx} \\ &= - \frac{\vartheta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} \end{aligned}$$

La curvatura (cambiata di segno) a parete viene chiamata:

$$\text{Parametro di Thwaites} \quad \lambda = \frac{\vartheta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} \quad (6.14)$$

- $\frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}$  pendenza del profilo a parete, legata al coefficiente d'attrito

$C_F$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} &= \frac{\vartheta}{U_e} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\eta=0} \\ &= \frac{\vartheta}{U_e \nu} \frac{1}{\rho} \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\eta=0} \\ &= \frac{\vartheta}{2} \frac{U_e}{\nu} \frac{1}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\eta=0} \\ &= \frac{\vartheta}{\nu} \frac{U_e}{2} \frac{C_F}{2} \end{aligned}$$

La pendenza del profilo di velocità a parete sarà rappresentata dal parametro  $\ell$ :

$$\ell = \frac{\vartheta}{\nu} \frac{U_e}{2} \frac{C_F}{2}$$

Thwaites assunse che *i parametri  $\ell$  e  $H$  fossero unicamente funzioni di  $\lambda$  parametro di Thwaites*:

$$H = H[\lambda(x)] \quad \ell = \ell[\lambda(x)]$$

Relazioni usate per il calcolo di  $H$  e  $\ell$ , una volta ottenuto  $\vartheta$  e quindi  $\lambda$  sono quelle di Cebecy & Bradshaw:

$$\begin{aligned} \text{Moti accelerati} \quad 0 \leq \lambda < 0.1 & \quad \begin{cases} \ell = 0.22 + 1.57\lambda - 1.8\lambda^2 \\ H = 2.61 - 3.75\lambda + 5.24\lambda^2 \end{cases} \\ \text{Moti decelerati} \quad -0.1 < \lambda \leq 0 & \quad \begin{cases} \ell = 0.22 + 1.402\lambda + \frac{0.018 \lambda}{\lambda + 0.107} \\ H = \frac{0.0731}{\lambda + 0.14} + 2.088 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Si moltiplichino per  $U \vartheta / \nu$  l'equazione di Von Kàrmàn:

$$\begin{aligned} \frac{U_e \vartheta}{\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \frac{U_e \vartheta}{\nu} \frac{C_f}{2} - \frac{\vartheta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} (H + 2) \\ \frac{U_e \vartheta}{\nu} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= \ell - \lambda (H + 2) \\ \frac{U_e}{\nu} \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x} &= 2 [\ell - \lambda (H + 2)] \end{aligned}$$

$$\frac{U_e}{\nu} \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x} = F(\lambda)$$

A questo punto entra in gioco una **ulteriore assunzione, empirica, di Thwaites basata su riscontri sperimentali**:

$$\frac{U_e}{\nu} \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x} = 0.45 - 6 \lambda \quad (6.16)$$

Con l'espressione di  $\lambda$ :

$$\frac{U_e}{\nu} \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x} = 0.45 - 6 \frac{\vartheta^2}{\nu} \frac{\partial U_e}{\partial x}$$

e moltiplicando per  $U_e^5$ :

$$\begin{aligned} \frac{U_e^6}{\nu} \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x} &= 0.45 U_e^5 - 6 \frac{U_e^5 \vartheta^2}{\nu} \frac{\partial U_e}{\partial x} \\ \frac{U_e^6}{\nu} \frac{\partial \vartheta^2}{\partial x} + 6 \frac{U_e^5 \vartheta^2}{\nu} \frac{\partial U_e}{\partial x} &= 0.45 U_e^5 \\ \frac{1}{\nu} \frac{\partial (U_e^6 \vartheta^2)}{\partial x} &= 0.45 U_e^5 \end{aligned}$$

Questa equazione può essere facilmente integrata:

$$\left[ \frac{1}{\nu} U_e^6 \vartheta^2 \right]_0^x = \int_0^x 0.45 U_e^5 dx$$

Al punto di arresto,  $x = 0$  è  $U_e = 0$ :

$$\frac{1}{\nu} U_e^6 \vartheta^2 = \int_0^x 0.45 U_e^5 dx$$

In definitiva lo spessore di quantità di moto risulta:

$$\boxed{\vartheta^2 = \frac{0.45 \nu}{U_e^6} \int_0^x U_e^5 dx} \quad (6.17)$$

Una volta noto  $\vartheta(x)$  è possibile ottenere  $\lambda(x) = \frac{\vartheta^2(x)}{\nu} \frac{dU_e(x)}{dx}$ ,  $\ell(x)$  ed  $H(x)$  dalle (6.15), e finalmente lo spessore di spostamento  $\delta^*(x) = H(x)\vartheta(x)$  che permette di ricalcolare il campo di moto esterno, e il coefficiente di attrito  $C_f = 2 \frac{\nu}{U_e(x)\vartheta(x)} \ell(x)$ . Osservando l'andamento dello sforzo a parete  $\tau_P(x)$  si cercherà di determinare il punto di separazione.

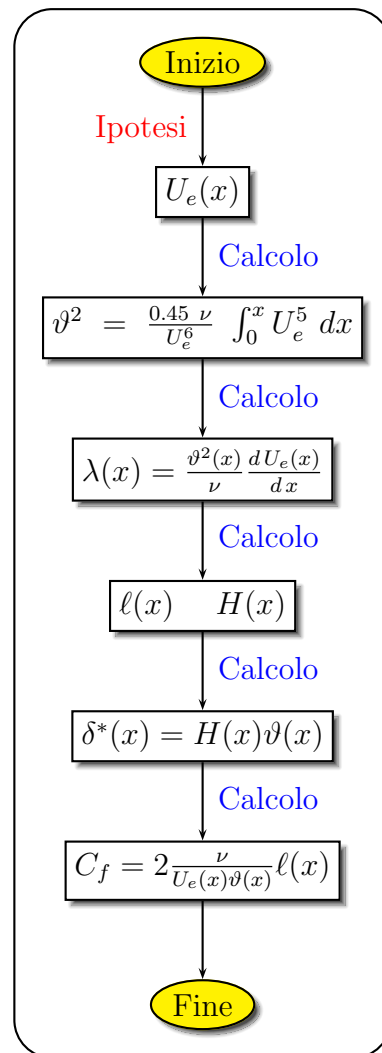


Tabella 6.5: Utilizzo del metodo di Thwaites.

## Capitolo 7

# Equazione di Blasius: soluzione esatta delle equazioni di Prandtl per la lastra piana

La soluzione esatta di Blasius di moto stazionario su lastra piana prende spunto dai problemi di moto ed arresto impulsivo visti nel capitolo precedente. In quei problemi di moto transitorio, si è visto come la soluzione dell'atto di moto adimensionata fosse unica, propagantesi nel tempo similmente a se stessa e scalata con la radice quadrata del tempo<sup>1</sup>. Blasius, al fine di ridurre il sistema delle due equazioni di Prandtl ad una unica equazione adimensionata, introduce la funzione di corrente nota dall'aerodinamica.

### 7.1 La funzione di corrente $\Psi$

$$\Psi(P) = \int_0^P \vec{V} \cdot \vec{n} \, dl$$

La funzione di corrente rappresenta la portata volumetrica che attraversa una linea qualunque che congiunge l'origine degli assi con il punto considerato.

$$d\Psi = \vec{V} \cdot \vec{n} \, dl$$

$$d\Psi = (u \vec{i} + v \vec{j}) (-\vec{j} \, dx + dy \vec{i})$$

$$d\Psi = u \, dy - v \, dx$$

---

<sup>1</sup>Vedi Eq. (5.1).

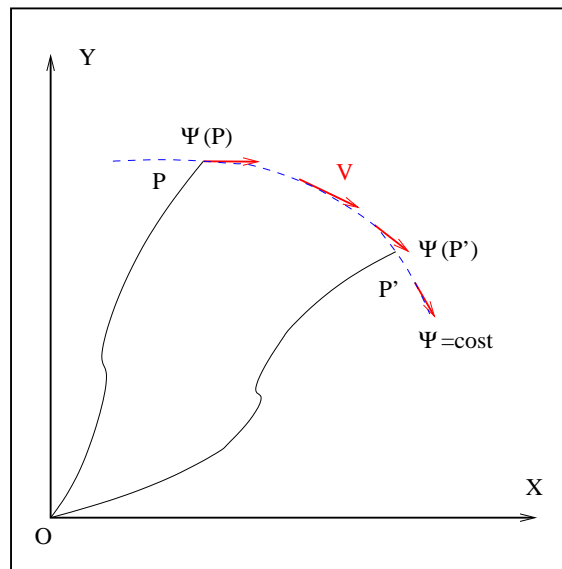


Figura 7.1: Funzione di corrente

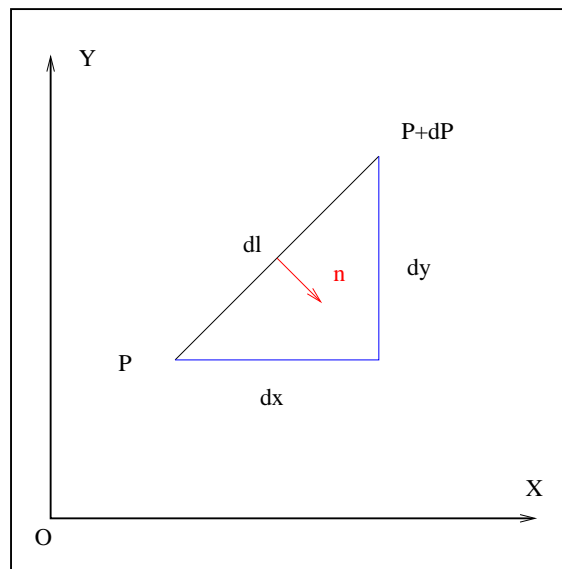


Figura 7.2: Portata elementare

da cui si ricavano  $u$  e  $v$  dividendo l'espressione sopra per  $dy$  e  $dx$ :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Si ricordano le ipotesi di lavoro:

- moto stazionario;
- moto bidimensionale;
- fluido incompressibile;
- semplificazioni di Prandtl;
- lastra piana, ossia  $dP/dx = 0$ .

Le equazioni di Prandtl diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{array} \right.$$

con le condizioni al contorno:

$$\text{c.c.} \left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \\ u(x, \infty) = U \end{array} \right.$$

La funzione di corrente soddisfa la prima equazione di continuità :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = 0 \text{ per il th. di Schwartz}$$

Nella seconda equazione della quantità di moto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}\end{aligned}$$

sostituendo si ottiene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}$$

Ci si è ricondotti ad una equazione differenziale nella sola  $\Psi$ . A questo punto adimensionando ci si potrà ricondurre ad una equazione differenziale ordinaria in una sola variabile in virtù del fatto che le soluzioni sono profili affini.

Si introducono la funzione di corrente adimensionata:

$$\begin{aligned}f &= \frac{\Psi}{U \delta} \\ \Psi &= f U \delta = f U \sqrt{\frac{\nu x}{U}}\end{aligned}$$

e la coordinata adimensionata  $\eta$ :

$$\eta = \frac{y}{\delta} = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

Si riportano tutti i calcoli per ottenere l'equazione definitiva di Blasius:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial y} &= \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( f U \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \right) &= \\ U \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \\ U \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \frac{df}{d\eta} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} &= \\ U \frac{df}{d\eta} &= u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \\
&\frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{df}{d\eta} \right) \\
&U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
&- \frac{1}{2} U \frac{d^2 f}{d\eta^2} y \sqrt{\frac{U}{\nu}} x^{-\frac{3}{2}} \\
&- \frac{1}{2x} U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \eta \\
\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \\
&\frac{\partial}{\partial x} \left( f U \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \right) \\
&U \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \frac{\partial f}{\partial x} + U f \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \\
&U \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} U f \sqrt{\frac{\nu}{U x}} \\
&- \frac{1}{2} U \frac{df}{d\eta} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} y \sqrt{\frac{U}{\nu}} x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} U f \sqrt{\frac{\nu}{U x}} \\
&- \frac{1}{2} U \frac{df}{d\eta} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} y \sqrt{\frac{U}{\nu}} x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} f \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \\
&- \frac{1}{2x} U \frac{df}{d\eta} y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} + \frac{1}{2} f \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \\
&- \frac{1}{2} \frac{df}{d\eta} \eta \sqrt{\frac{\nu U}{x}} + \frac{1}{2} f \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \\
&\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left( f - \eta \frac{df}{d\eta} \right) = -v
\end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( U \frac{df}{d\eta} \right) \\ U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \right) \\ U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) \\ U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \frac{d^3 f}{d\eta^3} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \\ \frac{U^2}{\nu x} \frac{d^3 f}{d\eta^3}\end{aligned}$$

## 7.2 L'equazione di Blasius

Sostituendo le espressioni trovate nella equazione principale:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \\ U \frac{df}{d\eta} \left( -\frac{1}{2x} U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \eta \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left( f - \eta \frac{df}{d\eta} \right) U \frac{d^2 f}{d\eta^2} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \nu \frac{U^2}{\nu x} \frac{d^3 f}{d\eta^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{U^2}{2x} \frac{df}{d\eta} \frac{d^2f}{d\eta^2} \eta - \frac{U^2}{2x} \left( f - \eta \frac{df}{d\eta} \right) \frac{d^2f}{d\eta^2} &= \nu \frac{U^2}{x} \frac{d^3f}{d\eta^3} \\
 -\frac{U^2}{2x} f \frac{d^2f}{d\eta^2} &= \nu \frac{U^2}{x} \frac{d^3f}{d\eta^3} \\
 -\frac{1}{2} f \frac{d^2f}{d\eta^2} &= \frac{d^3f}{d\eta^3}
 \end{aligned}$$

Si ottiene finalmente l'equazione di Blasius:

$$2 \frac{d^3f}{d\eta^3} + f \frac{d^2f}{d\eta^2} = 0$$

$$\boxed{2 f''' + f f'' = 0} \quad (7.2)$$

con le condizioni al contorno:

$$\text{c.c.} \left\{ \begin{array}{ll} f(\eta=0) = 0 & \text{Portata a parete} \\ \left( \frac{df}{d\eta} \right)_{\eta=0} = \left( \frac{u}{U} \right)_{\eta=0} = 0 & \text{Velocità } u \text{ a parete} \\ \left( \frac{df}{d\eta} \right)_{\eta \rightarrow \infty} = \left( \frac{u}{U} \right)_{\eta \rightarrow 1} = 1 & \text{Velocità indisturbata} \end{array} \right.$$

## 7.3 Risoluzione dell'equazione di Blasius

La soluzione dell'equazione di Blasius può essere condotta adottando per  $f(\eta)$  uno sviluppo in serie di Taylor<sup>2</sup>. Qui si procederà dapprima riducendo l'equazione di terzo grado ad un sistema di tre equazioni differenziali di primo grado, poi procedendo all'integrazione con il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine. Si ponga:

$$f = f_1$$

$$\begin{cases} f_1' = f_2 \\ f_2' = f_3 \\ f_3' = -\frac{1}{2} f_1 f_3 \end{cases}$$

<sup>2</sup>Si veda:

[www.see.ed.ac.uk/~johnc/teaching/fluidmechanics4/2003-04/fluids9/2-dboundary.html](http://www.see.ed.ac.uk/~johnc/teaching/fluidmechanics4/2003-04/fluids9/2-dboundary.html)

con le condizioni al contorno:

$$\text{c.c.} \left\{ \begin{array}{ll} f_1(\eta = 0) & = 0 \quad \text{Portata a parete} \\ f_2(\eta = 0) & = \left( \frac{u}{U} \right)_{\eta=0} = 0 \quad \text{Velocità } u \text{ a parete} \\ f_2(\eta \rightarrow \infty) & = \left( \frac{u}{U} \right)_{\eta \rightarrow 1} = 1 \quad \text{Velocità indisturbata} \end{array} \right.$$

### 7.3.1 Il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine

Il metodo di R-K<sup>3</sup> è un metodo numerico di soluzione di sistemi di equazioni differenziali del primo ordine a valori iniziali: *problemi ai valori iniziali*.

Una qualsiasi equazione differenziale ordinaria, in cui cioè tutte le variabili dipendenti sono funzione di un'**unica** variabile indipendente, di qualsiasi ordine, può sempre essere ridotta ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Ad esempio una equazione del tipo:

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + q(x) \frac{dg}{dx} = r(x)$$

nell'incognita scalare  $g(x)$  può essere riscritta nella forma di sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = y_2(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = r(x) - q(x) y_2(x) \end{array} \right.$$

nella funzione vettoriale incognita  $y(x) = \{y_1(x), y_2(x)\}^T$ , dove l'incognita originale  $g(x) \equiv y_1(x)$  e  $y_2(x)$  è una nuova variabile dipendente.

In generale il generico problema di equazioni differenziali ordinarie viene quindi sempre ricondotto allo studio di un sistema di M equazioni accoppiate del primo ordine per le funzioni  $y_i$ , nella forma:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_M) \Big|_{i=1, \dots, M}$$

che con le condizioni iniziali:

$$y_i(x_0) = y_{0i} \Big|_{i=1, \dots, M}$$

<sup>3</sup>Tratto da:

<http://www.dpa.unina.it/coiro/esercitazioni/download/runge-kutta.pdf>

Questo costituisce un **problema di valori iniziali** che ammette una soluzione unica, sotto opportune ipotesi di regolarità della funzione  $f$ . Problemi in cui le condizioni non sono iniziali ma date in altri punti del dominio di integrazione costituiscono *problemi di valori al contorno*. I metodi numerici di integrazione dei problemi ai valori iniziali sono detto **metodi al passo**. Con questi metodi si determinano in maniera approssimata i valori della  $y$  in corrispondenza di un numero discreto di valori della  $x$ :

$$x_{Iniziale} \equiv x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{Finale}$$

Il passo  $n$ -esimo di integrazione è dato da:

$$h_n = x_{n+1} - x_n$$

Solo per semplicità si porrà il passo di integrazione costante:

$$h = (x_{Fin} - x_{In})/N$$

in cui  $N$  è il numero dei passi di integrazione.

Qualsiasi procedura numerica di integrazione al passo segue la stessa semplice idea di base: i differenziali  $dy$  e  $dx$  vengono riscritti nelle formule come incrementi finiti  $\Delta x$  e  $\Delta y$ . Moltiplicando le equazioni per  $\Delta x$  si ottengono delle formule algebriche che danno la variazione delle funzioni  $f_i$ , cioè della variabile dipendente  $y$ , al variare, passo passo,  $\Delta x$  della variabile indipendente. Facendo tendere a zero il passo di integrazione, la soluzione numerica, campionata in un numero crescente di punti, tenderà alla soluzione esatta del problema di partenza. Questo modo di procedere corrisponde al metodo di Eulero.

### Metodo di Eulero

Nel metodo di Eulero<sup>4</sup> la soluzione avanza, una volta nota al passo  $n$  nella stazione  $x_n = x_0 + n h$ , al passo  $n + 1$  nella stazione  $x_{n+1} = x_n + h$ :

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) h \quad (7.3)$$

La Eq. (7.3) è una tipica formula “non simmetrica”, nel senso che sfrutta informazioni, le derivate  $f(x_n, y_n)$ , valutate solo al primo estremo dell'intervallo  $[x_n, x_{n+1}]$ . Ciò rende la “predizione” del valore  $y_{n+1}$  accurata a meno di un termine di correzione di  $o(h^2)$ . La formula di Eulero corrisponde quindi

<sup>4</sup>Si veda: <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/329/lectures/node30.html> o anche [6] per una trattazione sui metodi numerici per la soluzione delle ODE.

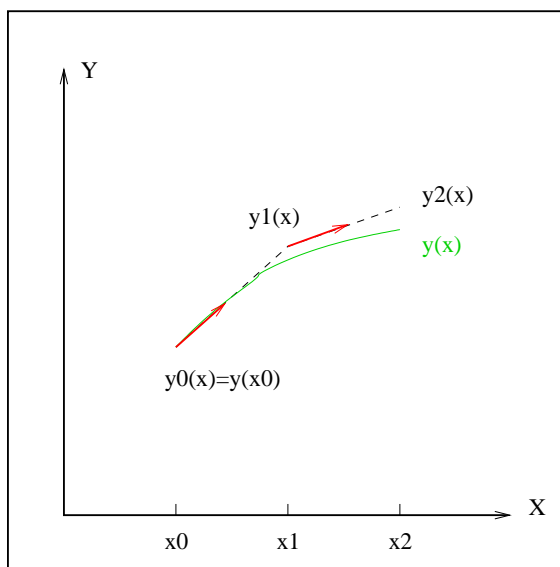


Figura 7.3: Passi nel metodo di Eulero

ad un metodo del primo ordine<sup>5</sup>. Il metodo di Eulero non è raccomandabile per un uso pratico per due motivi principali:

1. non è accurato, a parità di passo di integrazione, quanto altri metodi di altrettanto semplice implementazione, come il metodo di Runge-Kutta;
2. il metodo di Eulero può risultare spesso instabile quando la funzione  $f$  è sensibilmente variabile.

### Errori numerici

Si hanno principalmente due tipi di errore negli schemi di soluzione delle equazioni differenziali ordinarie:

**errore di troncamento** che è l'errore dovuto alla sostituzione della vera funzione con un polinomio. Ad esempio il generico tratto di funzione nel metodo di Eulero viene sostituito da una linea retta dando luogo ad ogni passo ad un errore  $\mathcal{O}(h^2)$ . Se, per esempio, l'intervallo di integrazione è dell'ordine di grandezza dell'unità, occorreranno  $\mathcal{O}(h^{-1})$

<sup>5</sup>Per convenzione un metodo si dice di ordine  $r$  se il termine di correzione  $E = y_{n+1} - y_n - k$  è  $\mathcal{O}(h^{r+1})$ , dove  $k$  è pari al prodotto di  $h$  per la  $f$  valutata nel modo proposto dallo schema in questione.

passi. Ciascun passo genererà un errore dell'ordine  $\mathcal{O}(h^2)$  e se nel caso peggiore gli errori dovessero essere tutti dello stesso segno, allora l'errore totale sarà dell'ordine  $\mathcal{O}(h^1)$  da cui discende il fatto che quello di Eulero è un metodo del primo ordine. Questo mostra come l'errore di troncamento nel metodo di Eulero sia direttamente proporzionale al passo di integrazione. Se ad esempio si volesse mantenere l'errore al di sotto di  $10^{-6}$  allora sarebbero necessari  $10^6$  passi di integrazione.

**errore di arrotondamento** è dovuto alla precisione “finita” delle operazioni in virgola mobile eseguite dal calcolatore. Ogni calcolatore è caratterizzato da un numero  $\epsilon$  che ne definisce la sensibilità, ossia il più piccolo valore che sommato ad un numero ne determina la variazione. Qualunque operazione in virgola mobile produce un errore di arrotondamento di ordine  $\mathcal{O}(\epsilon)$ . Supponendo di usare il metodo di Eulero su un intervallo unitario di integrazione, si dovranno effettuare  $\mathcal{O}(h^{-1})$  passi di integrazione, e quindi  $\mathcal{O}(h^{-1})$  operazioni in virgola mobile. Risulta evidente come l'errore massimo introdotto di arrotondamento risulterà  $\mathcal{O}(\epsilon/h)$

L'errore totale commesso nel metodo di Eulero sarà quindi:

$$e \simeq \frac{\epsilon}{h} + h$$

Si vede come l'errore sia influenzato dal passo di integrazione  $h$ : per intervalli di integrazione ampi prevarrà l'errore di troncamento, infittendo i passi di integrazione, ossia aumentando in numero di operazioni in virgola mobile, prevarrà l'errore di arrotondamento. Il minimo della funzione  $e(h)$  si ha per  $h = \sqrt{\epsilon}$  e vale  $e_0 = 2\sqrt{\epsilon}$ .

### Instabilità numerica

Si consideri il seguente esempio.

$$y' = -\alpha y$$

con  $\alpha > 0$  e con la condizione al contorno:

$$y(0) = 1$$

che ha la soluzione analitica:

$$y(x) = \exp(-\alpha x)$$

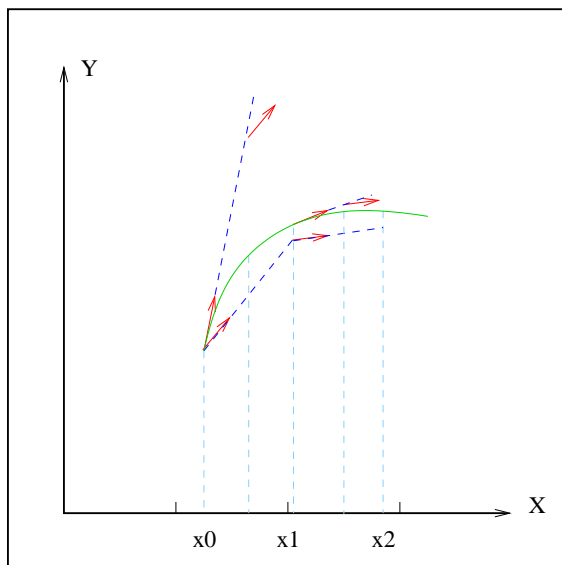


Figura 7.4: Runge Kutta del II ordine.

funzione monotona decrescente. Applicando il metodo di Eulero si avrà :

$$x_n = n h$$

$$y_{n+1} = y_n + (-\alpha e^{-\alpha n h}) h$$

$$y_{n+1} = y_n - \alpha h y_n$$

$$y_{n+1} = y_n(1 - \alpha h)$$

Si nota che se:

$$|1 - \alpha h| > 1$$

cioè :

$$h > 2/\alpha$$

allora:

$$|y_{n+1}| > |y_n|$$

Succede che se il passo di integrazione è troppo grande la soluzione numerica diventa oscillatoria e di ampiezza crescente divergendo dalla soluzione vera. Questo descritto è un fenomeno di ***instabilità numerica***.

### Metodo di Runge-Kutta del secondo ordine

Si è visto come nel metodo di Eulero venga introdotto un elevato errore di troncamento a causa della valutazione della pendenza della curva all'inizio  $x_n$  di ciascun passo di integrazione. A causa di questo il metodo di Eulero è molto *asimmetrico* nel suo procedere dall'inizio alla fine dell'intervallo di integrazione. Si può cercare di migliorare il metodo adottando un approccio più *simmetrico* valutando con il metodo di Eulero la pendenza nel punto medio del passo di integrazione ed utilizzando questa informazione per ottenere il valore della funzione all'estremità del passo:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f(x_n + h/2, y_n + h k_1/2) \\y_{n+1} &= y_n + h k_2 + o(h^3)\end{aligned}$$

Così facendo si annulla l'errore del primo ordine ottenendo così un metodo del secondo ordine. Il metodo di Eulero può essere considerato un metodo di Runge Kutta del primo ordine.

### Metodo di Runge-Kutta del quarto ordine

Dai ragionamenti fatti si può intuire che l'ordine del metodo può essere aumentato al fine di aumentarne l'accuratezza. Il metodo più usato è quello del quarto ordine<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f(x_n + h/2, y_n + k_1 h/2) \\k_3 &= f(x_n + h/2, y_n + k_2 h/2) \\k_4 &= f(x_n + h, y_n + k_3 h) \\y_{n+1} &= y_n + h \left( \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + o(h^5) \right)\end{aligned} \tag{7.4}$$

in cui:

---

<sup>6</sup>Si veda:

<http://www.ecs.fullerton.edu/mathews/n2003/rungekutta/RungeKuttaProof.pdf> relativamente alla scelta dei coefficienti.

$[k_1]$  è la pendenza della curva all'inizio dell'intervallo;

$[k_2]$  è la pendenza nel punto medio dell'intervallo con  $y$  calcolato usando il valore  $k_1$ ;

$[k_3]$  è la pendenza nel punto medio dell'intervallo con  $y$  calcolato usando il valore  $k_2$ ;

$[k_4]$  è la pendenza della curva all'estremità dell'intervallo col valore di  $y$  calcolato usando  $k_3$ .

Si riporta di seguito la lista di comandi per il software “Octave” per la costruzione di una funzione RK-4:

---

```
function [tout, yout] = rk4(FunFcn, tspan, y0, ssize)

% RK4      Integrates a system of ordinary differential equations
%           using the fourth order Runge-Kutta method.
%           See also ODE45 and ODEDEMO.M.
%           [t,y] = rk4('yprime', tspan, y0) integrates the system
%           of ordinary differential equations described by the
%           M-file yprime.m over the interval tspan=[t0,tfinal]
%           and using initial conditions y0.
%           [t, y] = rk4(F, tspan, y0, ssize) uses step size ssize
%
% INPUT:
% F        - String containing name of user-supplied problem
%            description.
%            Call: yprime = fun(t,y) where F = 'fun'.
%            t        - Time (scalar).
%            y        - Solution column-vector.
%            yprime   - Returned derivative column-vector;
%            yprime(i) = dy(i)/dt.
% tspan = [t0, tfinal], where t0 is the initial value of t,
%          and tfinal is
%          the final value of t.
% y0       - Initial value column-vector.
% ssize    - The step size to be used.
%            (Default: ssize = (tfinal - t0)/100).
%
% OUTPUT:
% t        - Returned integration time points (column-vector).
% y        - Returned solution, one solution
```

---

```

%      column-vector per tout-value.
%
% The result can be displayed by: plot(t,y).

% Initialization

t0=tspan(1);
tfinal=tspan(2);
pm = sign(tfinal - t0); % Which way are we computing?
if nargin < 4, ssize = (tfinal - t0)/100; end
if ssize < 0, ssize = -ssize; end
h = pm*ssize;
t = t0;
y = y0(:); #vettore condizioni iniziali

% We need to compute the number of steps.

dt = abs(tfinal - t0);
N = floor(dt/ssize) + 1;
if (N-1)*ssize < dt
    N = N + 1;
end

% Initialize the output.

tout = zeros(N,1);
tout(1) = t;
yout = zeros(N,size(y,1));
yout(1,:) = y.';
k = 1;

% The main loop
while (k < N)
    if pm*(t + h - tfinal) > 0
        h = tfinal - t;
        tout(k+1) = tfinal;
    else
        tout(k+1) = t0 +k*h;
    end
    k = k + 1;

    % Compute the slopes

```

---

```

s1 = feval(FunFcn, t, y); s1 = s1(:);
s2 = feval(FunFcn, t + h/2, y + h*s1/2); s2=s2(:);
s3 = feval(FunFcn, t + h/2, y + h*s2/2); s3=s3(:);
s4 = feval(FunFcn, t + h, y + h*s3); s4=s4(:);
y = y + h*(s1 + 2*s2 + 2*s3 +s4)/6;
t = tout(k);
yout(k,:) = y.';

end;

```

---

### 7.3.2 Soluzione

Si è detto che il metodo RK-4 permette di risolvere problemi ai valori iniziali. Visto che la terza condizione del sistema di primo ordine non è una condizione iniziale, il metodo numerico sarà applicato per tentativi fino alla sua convergenza. Si immetteranno cioè valori di tentativo della  $f_2(0)$  fino a verificare il valore di  $f_2(\eta = \infty) = 1$ .

Si riporta sotto il listato dei comandi per il programma “Octave” per la risoluzione del sistema:

$$f = f_1$$

$$\begin{cases} f_1' = f_2 \\ f_2' = f_3 \\ f_3' = -\frac{1}{2} f_1 f_3 \end{cases}$$

con le condizioni al contorno:

$$\text{c.c.} \begin{cases} f_1(\eta = 0) = 0 & \text{Portata a parete} \\ f_2(\eta = 0) = \left(\frac{u}{U}\right)_{\eta=0} = 0 & \text{Velocità } u \text{ a parete} \\ f_2(\eta \rightarrow \infty) = \left(\frac{u}{U}\right)_{\eta \rightarrow 1} = 1 & \text{Velocità indisturbata} \end{cases}$$


---

```

#Garofalo Pierpaolo 2008
#Risoluzione della equazione di Blasius per lo strato
#limite su piastra piana con atto di moto stazionario
#incompressibile, laminare:
#y''' = -0.5 y y''
#che diventa:

```

```

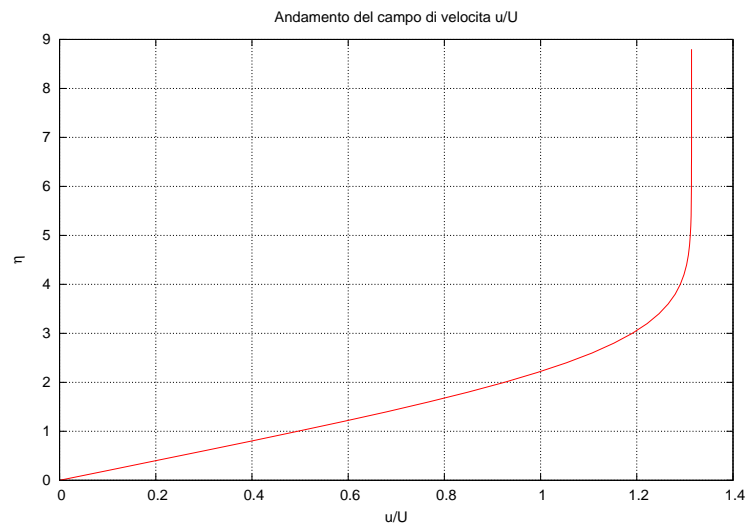
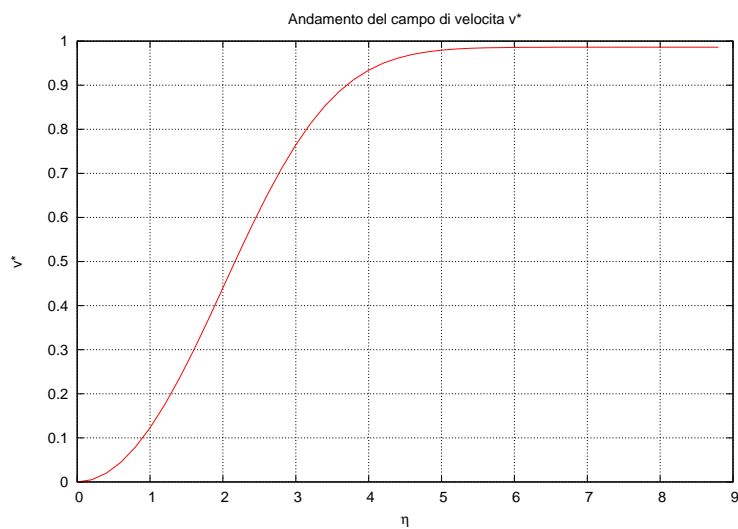
#y=X(1)
#y'=X(2)          -> X(1)'=X(2)
#y''=X(3)         -> X(2)'=X(3)
#y'''=-0.5 X(1)X(3) -> X(3)'=-0.5 X(1) X(3)
#Octave non ammette indice 0 nei vettori per cui si parte da X(1)
#con le condizioni iniziali:
#X(1)_o=0
#X(2)_o=0
#X(2)_infinito=1 questa viene sostituita dalla
#X(3)_o=0.5 (valore di prova. Si prova con valori diversi
#           fino a quando la X(2)_inf=0.99. Ci si è così
#           ricondotti ad un sistema ai valori iniziali)
#x2_g=0.33206; # X(3)_o
#valore di tentativo
x2_g=0.5
#definizione del sistema di ODE
function ret = f(n,X);
    ret = [X(2),X(3),-0.5*X(1)*X(3)];
endfunction
#calcolo la soluzione con RK-4
#sull'intervallo [0,8.8]
#con le condizioni iniziali [0,0,x2_g]
#con passo 0.2
#quindi con 45 risultati
[n,X]=rk4('f',[0,8.8],[0,0,x2_g],0.2);
#che memorizzo in una matrice ris nulla
#di 45 righe e 4 colonne
ris=zeros(45,4)
ris(:,1)=n
ris(:,2)=X(:,1)
ris(:,3)=X(:,2)
ris(:,4)=X(:,3)
#creo una matrice di risultati per la velocità u
#(derivata della funzione di corrente
#rispetto a y)
#che è la derivata di f ossia X(2)
u=zeros(45,2)
u(:,1)=n
u(:,2)=X(:,2)
#e la velocità v (-derivata della funzione di corrente
#rispetto a x)
v=zeros(45,2)
v(:,1)=n

```

```

v(:,2)=-0.5.*(X(:,1)-n.*X(:,2))
#-----Plottaggio con Gnuplot -----
subplot(2,1,1)
clearplot
title("Andamento del campo di velocita u/U")
xlabel("u/U")
ylabel("/Symbol h")
grid
plot (X(:,2),n,"-;") #n = eta e x(2)=df/d eta=u/U
#pause(2)
subplot(2,1,2)
clearplot
title("Andamento del campo di velocita v*")
ylabel("v*")
xlabel("/Symbol h")
grid
plot (n,v(:,2),"-;") #v
#pause(4)
multiplot(0,0)
#salvataggio dei risultati numerici in formato testo
save ("-text", "f.txt","ris" )
save ("-text", "u.txt","u" )
save ("-text", "v.txt","v" )
clearplot
title("Andamento del campo di velocita u/U")
xlabel("u/U")
ylabel("/Symbol h")
grid
plot (X(:,2),n,"-;")
#salvataggio in formato postscript e fig
print('u.eps','-deps','-color')
print('u.fig','-dfig','-color')
#pause(2)
clearplot
title("Andamento del campo di velocita v*")
ylabel("v*")
xlabel("/Symbol h")
grid
plot (n,v(:,2),"-;") #n = eta e x(2)=df/d eta=u/U
#pause(2)
print('v.eps','-deps','-color')
print('v.fig','-dfig','-color')

```


 Figura 7.5: Andamento di  $u$  con  $f_2(0) = 0.5$ .

 Figura 7.6: Andamento di  $v$  con  $f_2(0) = 0.5$ .

I risultati numerici con il valore di tentativo  $f_2(0) = 0.5$  della velocità  $u$ :

---

```
# Created by Octave 2.1.73, Wed Aug 13 17:32:25 2008 CEST <pier@asus>
# name: u
# type: matrix
# rows: 45
# columns: 2
0    0
0.2  0.0999916666666667
0.4  0.199866769387403
0.6  0.299326870562877
0.8  0.397880799861232
1    0.494858906713354
1.2  0.589439201181084
1.4  0.680687529809664
1.6  0.767611934559807
1.8  0.849228773346624
2    0.9246354220533
2.2  0.993082025224886
2.4  1.05403349003851
2.6  1.10721326453878
2.8  1.15262258573943
3    1.19053250968425
3.2  1.22145036638054
3.4  1.24606629598595
3.6  1.26518827714502
3.8  1.27967499132528
4    1.29037494620368
4.2  1.29807795873967
4.4  1.30348210818588
4.6  1.30717636696979
4.8  1.30963686980374
5    1.31123346271156
5.2  1.31224277558441
5.4  1.31286437985951
5.6  1.3132373378738
5.8  1.31345534445874
6    1.31357949624671
6.2  1.31364838109947
6.4  1.31368562020397
6.6  1.31370523575996
6.8  1.31371530399147
```

```

7    1.31372034000341
7.2  1.31372279491664
7.4  1.31372396130143
7.6  1.31372450149649
7.8  1.31372474539892
8    1.31372485277311
8.2  1.31372489887003
8.4  1.31372491817246
8.6  1.3137249260576
8.8  1.31372492920076

```

---

e della velocità  $v$  tenendo conto della Eq. (7.1):

---

```

# Created by Octave 2.1.73, Wed Aug 13 17:32:27 2008 CEST <pier@asus>
# name: v
# type: matrix
# rows: 45
# columns: 2
0    0
0.2  0.00499916666666667
0.4  0.0199783517252467
0.6  0.0448379939788858
0.8  0.0793216231977251
1    0.122945266569976
1.2  0.174940544108478
1.4  0.234219967571769
1.6  0.299372955613493
1.8  0.368698993971905
2    0.440280054496841
2.2  0.512088296664206
2.4  0.582118350319268
2.6  0.648527762331444
2.8  0.70976617795666
3    0.764674675506132
3.2  0.812541505815622
3.4  0.853108253418729
3.6  0.886529202871182
3.8  0.913294291446824
4    0.934130760657306
4.2  0.949899745506814
4.4  0.961501879206796

```

---

```

4.6 0.969801641363416
4.8 0.975575048245007
5   0.979480633139437
5.2 0.982050305813041
5.4 0.983694898040276
5.6 0.984718846285455
5.8 0.985339125464148
6   0.985704750032199
6.2 0.985914485462863
6.4 0.986031582526141
6.6 0.986095219317538
6.8 0.986128886779621
7   0.986146229063029
7.2 0.986154927733923
7.4 0.986159176970869
7.6 0.986161198806093
7.8 0.986162135997231
8   0.986162559284754
8.2 0.986162745601683
8.4 0.986162825543091
8.6 0.986162858985414
8.8 0.986162872629341

```

---

Ripetendo i calcoli e affinando il valore della  $f_2(0) = 0.33206$  si perviene al risultato definitivo per la velocità  $u$ :

---

```

# Created by Octave 2.1.73, Wed Aug 13 17:38:48 2008 CEST <pier@asus>
# name: u
# type: matrix
# rows: 45
# columns: 2
0   0
0.2 0.0664083245385467
0.4 0.132765222710668
0.6 0.19893883597176
0.8 0.264711229858759
1   0.329782609088748
1.2 0.393779140977255
1.4 0.45626522518624
1.6 0.516760628235052
1.8 0.574762325949178

```

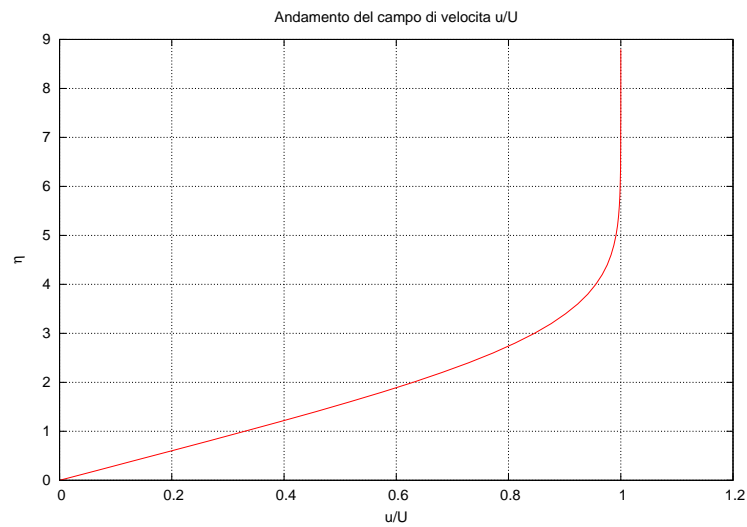


Figura 7.7: Andamento di  $u$  per  $f_2(0) = 0.33206$ .

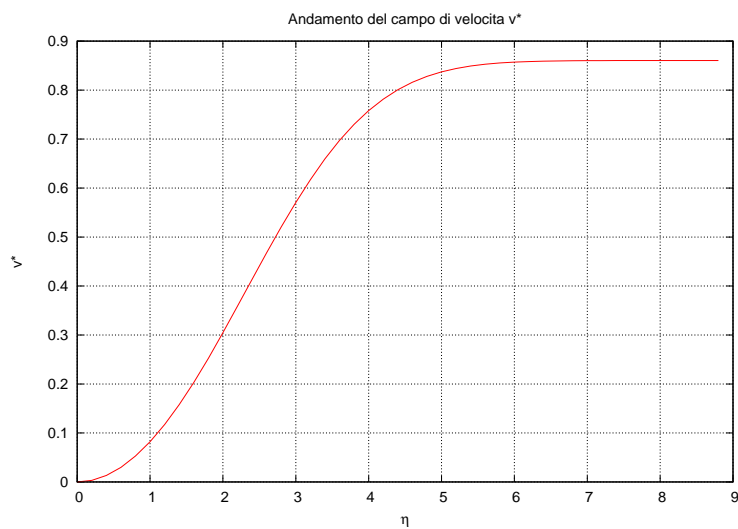


Figura 7.8: Andamento di  $v$  per  $f_2(0) = 0.33206$ .

```

2    0.629770208795281
2.2  0.681315090253136
2.4  0.728986838876873
2.6  0.772460066042543
2.8  0.811514759971787
3    0.846049623941811
3.2  0.876086632179439
3.4  0.901766351464762
3.6  0.923334710649943
3.8  0.941122926259503
4    0.955523025258926
4.2  0.966961729458776
4.4  0.975875356243601
4.6  0.982687914084657
4.8  0.987793859411693
5    0.991546189766623 <----- NOTA!!
5.2  0.994249819186649
5.4  0.996159616958882
5.6  0.997482139142651
5.8  0.998379943104514
6    0.998977412217222
6.2  0.999367175423457
6.4  0.999616426168056
6.6  0.999772677335702
6.8  0.999868697824312
7    0.999926542379829
7.2  0.999960702895239
7.4  0.999980479710612
7.6  0.999991704191258
7.8  0.999997949635846
8    1.00000135652765
8.2  1.00000317859072
8.4  1.00000413400654
8.6  1.00000462520965
8.8  1.00000487283048

```

---

Si nota come per il valore  $\eta = 5$  la velocità raggiunge il 99% della velocità indisturbata. Si ottiene quindi la velocità  $v$  ottenuta ricorrendo alla Eq. (7.1):

---

```

# Created by Octave 2.1.73, Wed Aug 13 17:38:49 2008 CEST <pier@asus>
# name: v

```

```
# type: matrix
# rows: 45
# columns: 2
0 0
0.2 0.00332023245385467
0.4 0.0132728491885333
0.6 0.0298138733156432
0.8 0.0528296669920932
1 0.0821044235716444
1.2 0.117291760130794
1.4 0.157893117242982
1.6 0.203245943450929
1.8 0.252524444652262
2 0.304754914394454
2.2 0.358846319260917
2.4 0.413635010576861
2.6 0.467940424753924
2.8 0.520626784318853
3 0.570664521114233
3.2 0.61718474772162
3.4 0.659520771202718
3.6 0.697232311649163
3.8 0.730110461878604
4 0.758164046514086
4.2 0.781590406772028
4.4 0.800735332984604
4.6 0.816047651100169
4.8 0.828033820084595
5 0.837216984157231
5.2 0.844103538341984
5.4 0.849158732857672
5.6 0.852791443177734
5.8 0.855347158225731
6 0.857107572461414
6.2 0.858294897903453
6.4 0.859079064106985
6.6 0.859586241644434
6.8 0.859907500126428
7 0.860106806032912 <---- Nota!!! v non tende a 0!!!
7.2 0.86022791720832
7.4 0.860300006984057
7.6 0.860342042373984
7.8 0.860366054733339
```

```

8    0.860379493500477
8.2  0.860386862621736
8.4  0.860390822037394
8.6  0.860392906691037
8.8  0.860393982297895

```

---

La tabella dei risultati numerici complessivi:

---

```

# Created by Octave 2.1.73, Wed Jul 30 18:43:36 2008 CEST <pier@asus>
# name: ris_s
# type: matrix
# rows: 45
# columns: 4
eta f          f'=u/U          f''
0    0          0          0.332057566487107
0.2  0.00664115132974214  0.0664078378898394  0.331984070539935
0.4  0.026560196090787   0.13276425016679   0.331470082623147
0.6  0.0597351174357477  0.198937380215549  0.330079372261527
0.8  0.106108873367666   0.264709296748418  0.327389521834402
1    0.165572551858174   0.329780208811822  0.323007375615225
1.2  0.237949713293118   0.393776289035048  0.316589457043484
1.4  0.322982731342024   0.456261943115874  0.307865664248177
1.6  0.420322071687482   0.516756943972929  0.296663739460954
1.8  0.529519476548653   0.574758273751835  0.282931299607311
2    0.650025924002666   0.629765828663689  0.266751831108728
2.2  0.781194990106006   0.681310426853275  0.248351200794409
2.4  0.922291865180395   0.728981940007935  0.228092050934451
2.6  1.07250779599889    0.772454980765418  0.206454922891342
2.8  1.23097920142188    0.811509536563194  0.184006903575263
3    1.39681021706094     0.846044307872071  0.161360657052942
3.2  1.56909704596405     0.87608126431607   0.139128442692262
3.4  1.74695229521352     0.901760966676975  0.117876712085434
3.6  1.92952750141906     0.923329336934824  0.0980868582886133
3.8  2.11603229056086     0.941117584439223  0.0801266469428202
4    2.30574903857264     0.955517729223505  0.0642350303589664
4.2  2.49804242679995     0.966956486864364  0.0505208574434901
4.4  2.69236383518187     0.975870169532476  0.0389739253803296
4.6  2.88825100440625     0.982682781675052  0.0294852754885411
4.8  3.08532376542091     0.987788776912405  0.0218728436263291
-----
5    3.28327684892383     0.991541151097432  0.0159085583222748 <--

```

---

5.2	3.48187084757284	0.994244817522779	0.0113435890905536
5.4	3.68092233314273	0.996154645457552	0.00792943542669457
5.6	3.88029396830335	0.997477191445267	0.00543364800535935
5.8	4.0798852413835	0.998375013634862	0.0036499682410053
6	4.279624231742	0.998972496312524	0.00240342250513736
6.2	4.47946061303674	0.99936226934186	0.00155136114127469
6.4	4.67935993999854	0.999611527015197	0.000981608234759622
6.6	4.87929914854066	0.999767782946965	0.000608847711924993
6.8	5.07926312783041	0.999863806630942	0.000370193417674096
7	5.27924218945689	0.999921653278191	0.000220650033984752
7.2	5.47923025361683	0.999955815130629	0.000128926356147871
7.4	5.67922358561562	0.999975592780826	7.38499606215428e-05
7.6	5.87921993950019	0.999986817770827	4.14705220228405e-05
7.8	6.07921799283657	0.999993063519184	2.28307771752466e-05
8	6.27921698315998	0.999996470588116	1.23227235432912e-05
8.2	6.47921647996336	0.999998292752191	6.52096844367072e-06
8.4	6.67921624518158	0.999999248224349	3.3833996968987e-06
8.6	6.87921614986935	0.999999739458208	1.72126918796816e-06
8.8	7.07921612561236	0.999999987095451	8.5865608852971e-07

---

### Tecnica dello shooting

Si riporta la lista di comandi Octave per “automatizzare” la ricerca del valore di tentativo che soddisfi le condizioni al contorno reali su  $f_2(\infty)$ . Il pratica fornendo un valore di tentativo per  $f_2$  si ricava il valore ottenuto di  $f_2(\infty)$ . Si ricava un nuovo valore di tentativo  $f_2(0)$  per interpolazione e si ripete il calcolo iterativamente fino a quando  $f_2(\infty)$  ottenuto non differisce dal valore  $f_2(\infty) = 1$  a meno di un errore stabilito.

---

```
#Garofalo Pierpaolo 2008
#----- Blasius risolta con la tecnica dello shooting
#Risoluzione della equazione di Blasius per lo strato
#limite su piastra piana con atto di moto stazionario
#incompressibile, laminare:
#y''' = -0.5 y y''
#che diventa:
#y=X(1)
#y'=X(2)          -> X(1) '=X(2)
#y''=X(3)         -> X(2) '=X(3)
```

```

#y'''=-0.5 X(1)X(3)      -> X(3)'=-0.5 X(1) X(3)
#Octave non ammette indice 0 nei vettori per cui si parte da X(1)
#con le condizioni iniziali:
#X(1)_o=0
#X(2)_o=0
#X(2)_infinito=1 questa viene sostituita dalla
#X(3)_o=0.5 (valore di prova. Si prova con valori diversi
#           fino a quando la X(1)_inf=0.99. Ci si è così
#           ricondotti ad un sistema ai valori iniziali)
#x2_g=0.33206; # X(3)_o
guess=0.5
g1=guess
toll=0.0000001
target=1
i=0
function ret = f(n,X); ret = [X(2),X(3),-0.5*X(1)*X(3)]; endfunction
[n,X]=rk4('f',[0,8.8],[0,0,g1],0.2);
t1=X(45,2)
g2=1.1*g1
[n,X]=rk4('f',[0,8.8],[0,0,g2],0.2);
t2=X(45,2)
while (abs(t2-target) > toll)
g=g2+(g2-g1)*(target-t2)/(t2-t1)
[n,X]=rk4('f',[0,8.8],[0,0,g],0.2);
t1=t2
t2=X(45,2)
g1=g2
g2=g
i++
if (i>4)
    break
endif
endwhile
shoot=[g , t2, i]
#-----
ris_s=zeros(45,4)
ris_s(:,1)=n
ris_s(:,2)=X(:,1)
ris_s(:,3)=X(:,2)
ris_s(:,4)=X(:,3)
u_s=zeros(45,2)
u_s(:,1)=n
u_s(:,2)=X(:,2)

```

```

v_s=zeros(45,2)
v_s(:,1)=n
v_s(:,2)=-0.5.*(X(:,1)-n.*X(:,2))
#-----
subplot(2,1,1)
clearplot
title("Andamento del campo di velocita u/U")
xlabel("u/U")
ylabel("/Symbol h")
grid
plot (X(:,2),n,"-;") #n = eta e x(2)=df/d eta=u/U
#pause(2)
subplot(2,1,2)
clearplot
title("Andamento del campo di velocita v*")
ylabel("v*")
xlabel("/Symbol h")
grid
plot (n,v_s(:,2),"-;") #v
#pause(4)
multiplot(0,0)
save ("-text", "f_s.txt","ris_s" )
save ("-text", "u_s.txt","u_s" )
save ("-text", "v_s.txt","v_s" )
clearplot
title("Andamento del campo di velocita u/U")
xlabel("u/U")
ylabel("/Symbol h")
grid
plot (X(:,2),n,"-;")
#pause(2)
print('u_s.eps','-deps','-color')
print('u_s.fig','-dfig','-color')
#pause(2)
clearplot
title("Andamento del campo di velocita v*")
ylabel("v*")
xlabel("/Symbol h")
grid
plot (n,v_s(:,2),"-;") #n = eta e x(2)=df/d eta=u/U
#pause(2)
print('v_s.eps','-deps','-color')
print('v_s.fig','-dfig','-color')

```

#pause(2)

---

Questi calcoli possono essere fatti anche ricorrendo all'uso di un foglio elettronico. Esempi che utilizzano RK-4 con e senza shooting possono essere scaricati qui:

- [http://pier.unirc.eu/software/blasius\\_rk.ods](http://pier.unirc.eu/software/blasius_rk.ods)
- [http://pier.unirc.eu/software/blasius\\_rk\\_shooting.ods](http://pier.unirc.eu/software/blasius_rk_shooting.ods)

### 7.3.3 Calcolo dei parametri di strato limite

Ottenuti i valori numerici cercati si valutano le espressioni caratteristiche dello strato limite:

**Spessore di strato limite  $\delta$**  Dalle tabelle dei dati numerici si vede che il 99% della velocità indisturbata si raggiunge per  $\eta = 5$ .

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

$$5 = \delta_{0.99} \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

$$\delta_{0.99} = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

**Spessore di spostamento  $\delta^*$**

$$\eta_{\delta^*} = \int_0^{\eta_{0.99}} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

$$\eta_{\delta^*} = \int_0^{\eta_{0.99}} \left(1 - \frac{df}{d\eta}\right) d\eta$$

$$\eta_{\delta^*} = [\eta - f]_0^{\eta_{0.99}}$$

$$\eta_{\delta^*} = 5 - 3.2828 = 1.7172$$

allora:

$$1.7172 = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

$$\delta^* = 1.7172 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

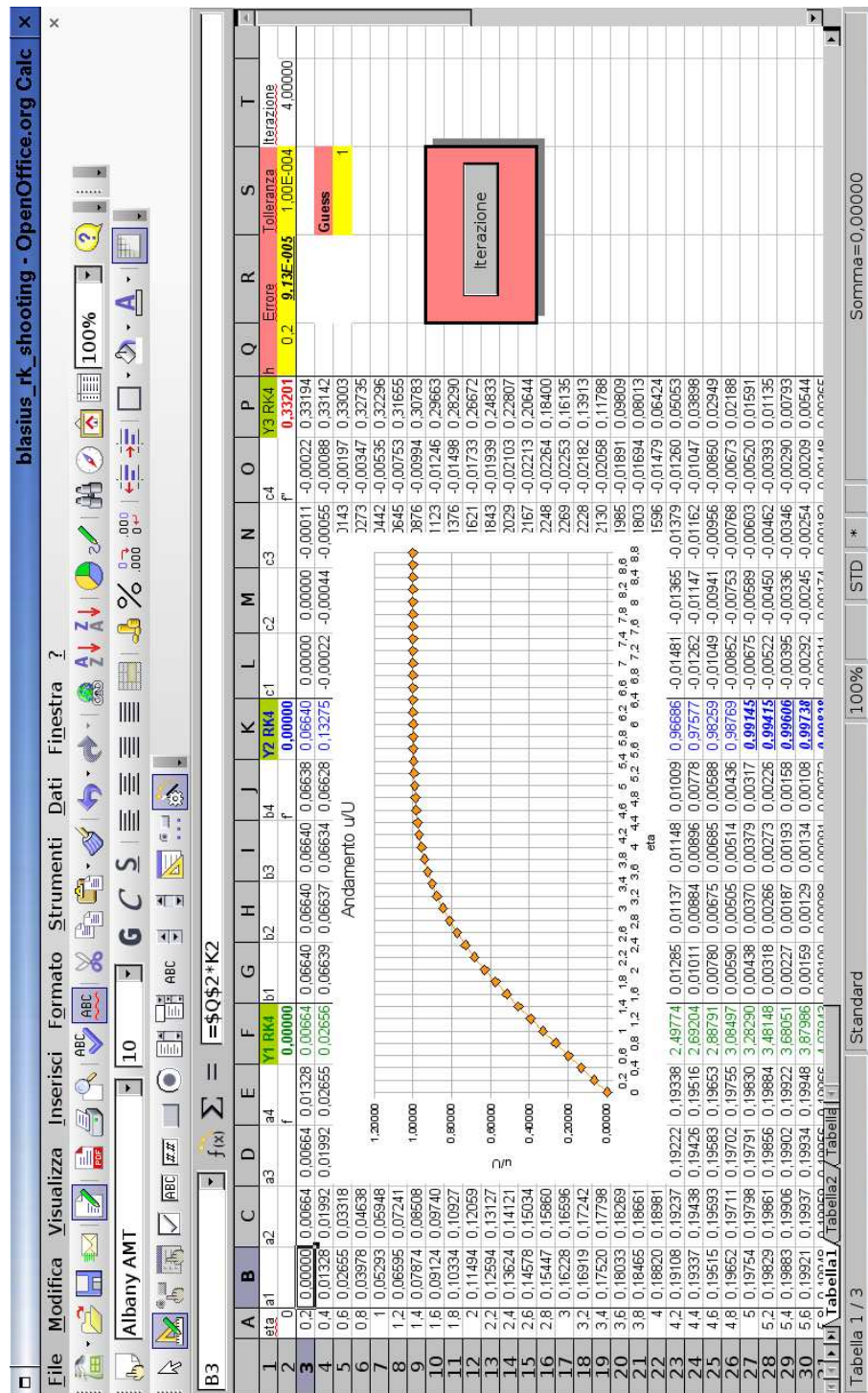


Figura 7.9: RK-4 con shooting su Openoffice

Spessore di quantità di moto  $\vartheta$

$$\eta_{\vartheta} = \int_0^{\eta_{0.99}} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta$$

$$\eta_{\vartheta} = \int_0^{\eta_{0.99}} \left( \frac{df}{d\eta} - \left( \frac{df}{d\eta} \right)^2 \right) d\eta$$

$$\eta_{\vartheta} = \int_0^{\eta_{0.99}} (f' - f'^2) d\eta$$

si integra per parti la:

$$\int f'^2 d\eta = f' f - \int f f'' d\eta$$

ma ricordando l'Eq. (7.2) di Blasius:

$$f f'' + 2 f''' = 0$$

allora:

$$\int f'^2 d\eta = f' f + 2 \int f''' d\eta$$

$$\int f'^2 d\eta = f' f + 2 f''$$

per cui:

$$\eta_{\vartheta} = [f - f' f - 2 f'']_0^{\eta_{0.99}}$$

e sostituendo i valori numerici:

$$\eta_{\vartheta} = (3.2828 - 0.9915 \cdot 3.2828 - 2 \cdot 0.0159) - (0 - 0 - 2 \cdot 0.332) = 0.66$$

$$0.66 = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

$$\vartheta = 0.66 \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (7.5)$$

Frizione a parete  $\tau_p$

$$\tau_p = \mu \left( \frac{du}{dy} \right)_{y=0}$$

$$\tau_p = \frac{\mu U}{\delta} \left( \frac{du/U}{dy/\delta} \right)_{y=0}$$

$$\tau_p = \frac{\mu U}{\delta} f''_{\eta=0}$$

$$\tau_p = \frac{\mu U}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}} (f_3)_{\eta=0}$$

$$\tau_p = 0.332 U^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\mu \rho}{x}}$$

Coefficiente di attrito  $C_f$  della piastra

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho U^2}$$

$$C_f = 0.664 \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$$

Risultati esatti lastra piana Blasius		
	Blasius	
$\delta_{0.99}$	$5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	Spessore di strato limite
$\delta^*$	$1.7172 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	Spessore di spostamento
$\vartheta$	$0.66 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	Spessore di quantità di moto
$\tau_p$	$0.332 U^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\mu \rho}{x}}$	Frizione a parete
$C_f$	$0.664 \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$	Coefficiente di attrito

Tabella 7.1: Parametri di s.l. Blasius.

### 7.3.4 Velocità di spostamento

La soluzione esatta di Blasius evidenzia come la velocità  $v$  non si annulli allontanandosi dalla parete. Questo è necessario in termini di portata nello strato limite a causa della variazione della  $u$  lungo la  $x$ . Dalla Eq. (7.1)

$$v = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left( f - \eta \frac{df}{d\eta} \right)$$

$$v(\eta_{\delta_{0.99}}) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left( f - \eta \frac{df}{d\eta} \right)$$

$$v(\eta_{\delta_{0.99}}) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} (3.2828 - 5 \cdot 0.99)$$

$$v(\eta_{\delta_{0.99}}) = 0.837 \sqrt{\frac{\nu U}{x}}$$

Il valore 0.837 è ottenibile anche dalla tabella delle  $v$  in corrispondenza di  $\eta = 5$  riportata nelle pagine precedenti. A distanze maggiori la relazione sopra tende a:

$$v(\eta_{\delta_{0.99}}) = 0.86 \sqrt{\frac{\nu U}{x}}$$

Questo risultato è importante dal punto del profilo aerodinamico da sostituire a quello reale coperto dal suo strato limite: ***la presenza della  $v$  rende necessaria la presenza di una distribuzione di sorgenti sulla superficie del profilo per modellizzare correttamente il campo di velocità irrotazionale esterno col quale vengono condotti i calcoli.***

## Capitolo 8

# Atti di moto laminare con gradiente di pressione arbitrario

Le soluzioni dei capitoli precedenti sono state ottenute per via esatta ottenendo soluzioni del profilo di velocità simili, ossia geometricamente simili e scalate secondo la coordinata  $x$  o  $t$ . Ora si illustreranno delle soluzioni dell'atto di moto che si basano su ipotesi della legge dell'andamento del gradiente di pressione esterno allo strato limite. Le soluzioni saranno ancora del tipo auto simili.

### 8.1 Strato limite Falkner-Skan

Le equazioni di Prandtl vengono risolte introducendo l'ipotesi che il moto del campo esterno irrotazionale possa essere espresso nella forma:

$$\boxed{U(x) = c x^m}$$

con  $c > 0$ . Si riprendano le Eq. (6.2):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{d P_e}{d x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

e la relazione di Bernouilli nel campo esterno allo strato limite:

$$\frac{d P}{d x} = - \frac{1}{2} \rho \frac{d U^2}{d x}$$

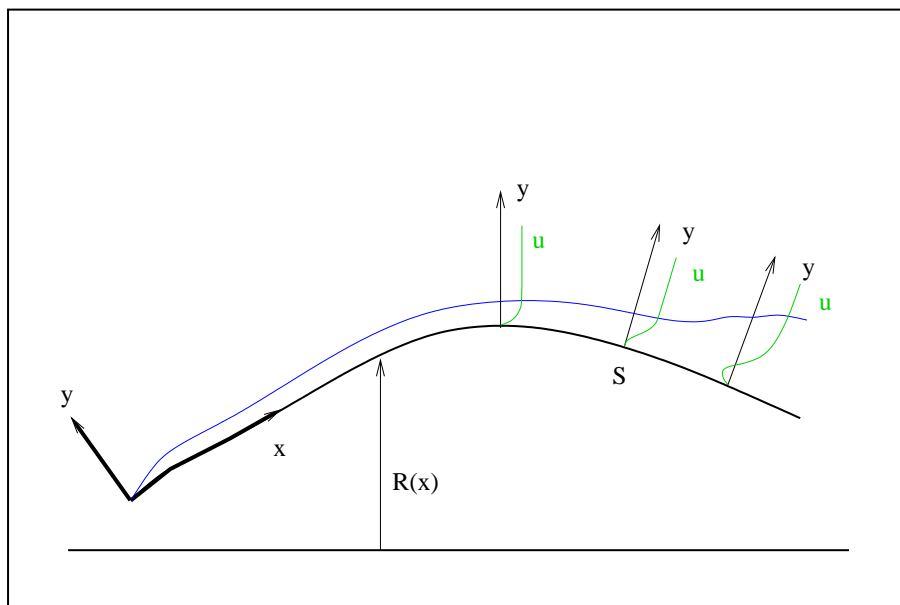


Figura 8.1: Atto di moto con gradiente di pressione arbitrario.

Con il profilo della velocità esterna ipotizzato si ottiene l'espressione del gradiente di pressione in funzione della velocità esterna:

$$\frac{dP}{dx} = -\rho c^2 m x^{2m+1}$$

sostituendo:

$$\left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = c^2 m x^{2m-1} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Si procede anche ora caso come nel caso della soluzione di Blasius ricorrendo all'introduzione della funzione di corrente  $\Psi$  e alla adimensionalizzazione:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{y}{\delta} \\
&= \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}} \\
&= \frac{y\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} x^{\frac{m-1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \frac{\Psi}{\delta U} \\
&= \frac{\Psi}{U \sqrt{\frac{\nu x}{U}}} \\
&= \frac{\Psi}{\sqrt{\nu c x^{m+1}}} \\
\Psi &= \sqrt{\nu c} f x^{\frac{m+1}{2}}
\end{aligned}$$

Si ricavano ora tutte le espressioni delle derivate da sostituire nella equazione di Prandtl con velocità esterna di Falkner-Skan:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{y\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} \frac{m-1}{2} x^{\frac{m-3}{2}}$$

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} x^{\frac{m-1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \sqrt{\nu c} f x^{\frac{m+1}{2}} \right) \\
&= \sqrt{\nu c} x^{\frac{m+1}{2}} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\
&= \sqrt{\nu c} x^{\frac{m+1}{2}} \frac{df}{d\eta} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} x^{\frac{m-1}{2}} \\
&= c \frac{df}{d\eta} x^m = u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \sqrt{\nu c} f x^{\frac{m+1}{2}} \right) \\
&= \sqrt{\nu c} \left( x^{\frac{m+1}{2}} \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + f \frac{m+1}{2} x^{\frac{m+1}{2}-1} \right) \\
&= \sqrt{\nu c} \left( \frac{df}{d\eta} \frac{y\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} \frac{m-1}{2} x^{\frac{m-3}{2}} x^{\frac{m+1}{2}} + f \frac{m+1}{2} x^{\frac{m-1}{2}} \right) \\
&= \sqrt{\nu c} \left( \frac{df}{d\eta} \frac{y\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} \frac{m-1}{2} x^{m-1} + f \frac{m+1}{2} x^{\frac{m-1}{2}} \right) = -v
\end{aligned}$$

o anche elaborando ulteriormente:

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left( \eta \frac{df}{d\eta} (m-1) + f \right) = -v$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( c \frac{df}{d\eta} x^m \right) \\
&= c x^m \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{d\eta}{dx} + c \frac{df}{d\eta} m x^{m-1} \\
&= c \left( \frac{df}{d\eta} m x^{m-1} + x^m \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{y\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} \frac{m-1}{2} x^{\frac{m-3}{2}} \right) \\
&= c \left( \frac{df}{d\eta} m x^{m-1} + \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{y\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} \frac{m-1}{2} x^{\frac{3m-3}{2}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left( c \frac{df}{d\eta} x^m \right) \\
&= c x^m \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} x^{\frac{m-1}{2}} \\
&= \frac{c^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\nu}} \frac{d^2 f}{d\eta^2} x^{\frac{3m-1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{c^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\nu}} \frac{d^3 f}{d\eta^3} x^{\frac{3m-1}{2}} \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} x^{\frac{m-1}{2}} \\
&= \frac{c^2}{\nu} \frac{d^3 f}{d\eta^3} x^{2m-1}
\end{aligned}$$

Si procede con la sostituzione:

$$\left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = c^2 m x^{2m-1} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

dapprima introducendo la funzione di corrente:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = c^2 m x^{2m-1} + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}$$

e successivamente le espressioni delle derivate:

$$\begin{aligned}
&c \frac{df}{d\eta} x^m c \left( \frac{df}{d\eta} m x^{m-1} + \frac{d^2 f}{d\eta^2} \frac{y\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} \frac{m-1}{2} x^{\frac{3m-3}{2}} \right) + \\
&- \sqrt{\nu c} \left( \frac{df}{d\eta} \frac{y\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} \frac{m-1}{2} x^{m-1} + f \frac{m+1}{2} x^{\frac{m-1}{2}} \right) \frac{c^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\nu}} \frac{d^2 f}{d\eta^2} x^{\frac{3m-1}{2}} = \\
&= c^2 m x^{2m-1} + \nu \frac{c^2}{\nu} \frac{d^3 f}{d\eta^3} x^{2m-1} \\
&c^2 x^m f'^2 m x^{m-1} + c^2 x^m f' \frac{m-1}{2} \frac{y\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} f'' x^{\frac{3(m-1)}{2}} + \\
&- c^2 f'' x^{\frac{3m-1}{2}} f' \frac{y\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} \frac{m-1}{2} x^{m-1} - c^2 f'' x^{\frac{3m-1}{2}} f \frac{m+1}{2} x^{\frac{m-1}{2}} = \\
&= c^2 m x^{2m-1} + c^2 x^{2m-1} f''' \\
&f'^2 m x^{2m-1} + f' f'' \frac{m-1}{2} \frac{y\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} x^{\frac{m-1}{2}} x^{\frac{2m-2}{2}+m} + \\
&- f' f'' \frac{m-1}{2} \frac{y\sqrt{c}}{\sqrt{\nu}} x^{\frac{m-1}{2}} x^{\frac{4m-2}{2}} - f f'' \frac{m+1}{2} x^{\frac{4m-2}{2}} = \\
&= m x^{2m-1} + x^{2m-1} f'''
\end{aligned}$$

moltiplicando tutto per  $x^{-(2m-1)}$

$$\begin{aligned}
&f'^2 m + f' f'' \frac{m-1}{2} \eta x^{2m-1} x^{-(2m-1)} + \\
&- f' f'' \frac{m-1}{2} \eta x^{2m-1} x^{-(2m-1)} - f f'' \frac{m+1}{2} x^{2m-1} x^{-(2m-1)} = \\
&= m + f'''
\end{aligned}$$

$$f'^2 m - f f'' \frac{m+1}{2} = m + f'''$$

e finalmente:

$$\boxed{f''' + f f'' \frac{m+1}{2} - f'^2 m + m = 0} \quad (8.1)$$

$$\text{c.c.} \left\{ \begin{array}{l} f(\eta=0) = 0 \quad \text{portata a parete nulla} \\ f'(\eta=0) = 0 \quad \text{u a parete nulla} \\ f'(\eta \rightarrow \infty) \rightarrow 1 \quad \text{u} = U \text{ nel campo irrotazionale} \end{array} \right.$$

che con il valore  $m = 0$  esprime nuovamente la Eq. (7.2) di Blasius.

### 8.1.1 Soluzione

Si riporta il codice per la soluzione dell'Eq. (8.1) da utilizzare con Octave:

---

```
#Pierpaolo Garofalo 2008
#Risoluzione della equazione di Falkner-Skan per lo strato
#limite con dp/dx non nullo atto di moto stazionario
#incompressibile, laminare, campo esterno u=cx^m:
#y''' = -(m+1)/2 y y'' + m y'^2 -m
#che diventa:
#y=X(1)
#y'=X(2)                                -> X(1)'=X(2)
#y''=X(3)                                -> X(2)'=X(3)
#y'''=-(m+1)/2 X(1)X(3) + m X(2)^2 -m
#          -> X(3)'=-(m+1)/2 X(1)X(3) + m X(2)^2 -m
#Octave non ammette indice 0 nei vettori per cui
# si parte da X(1) con le condizioni iniziali:
#X(1)_o=0
#X(2)_o=0
#X(2)_infinito=1 questa viene sostituita dalla
#X(3)_o=guess (valore di prova. Si prova con valori diversi
#             fino a quando la X(2)_inf=0.99. Ci si è così
#             ricondotti ad un sistema ai valori iniziali)
#----- Falkner-Skan risolta con la tecnica dello shooting
#----- L'algoritmo è molto sensibile ai valori di tentativo
#global m=-0.0904; guess=0.5
```

---

```

#global m=-0.0654 ; guess=0.5
#global m=0      ; guess=0.5
#global m=0.3    ; guess=0.5
#global m=0.4    ; guess=0.7
#global m=0.5    ; guess=0.8
#global m=0.6    ; guess=0.9
#global m=0.7    ; guess=0.97
#global m=0.8    ; guess=1.079
#global m=0.9    ; guess=1.111
#global m=1      ; guess=1.232
#global m=1.1    ; guess=1.288
#global m=1.2    ; guess=1.3429
#global m=1.4    ; guess=1.444
#global m=1.5    ; guess=1.493
#global m=1.6    ; guess=1.540
#global m=1.7    ; guess=1.585
#global m=1.8    ; guess=1.623
#global m=1.9    ; guess=1.673
#global m=2      ; guess=1.7149
#global m=2.5    ; guess=1.911
#global m=3      ; guess=2.08878
#global m=3.5    ; guess=2.252
#global m=4      ; guess=2.405

global m
global etamax=10
mg = [ -0.0904, -0.0654, 0, 0.5, 0.8, 1, 4;
       0.5, 0.5, 0.5, 0.8, 1.079, 1.232, 2.405 ]
dguess=1.000001
toll=0.0000001
target=1
dstep=0.1
nstep=ceil(etamax/dstep)+1
ris_s=zeros(nstep,8)
for j = 1:7
    m=mg(1,j)
    g1=mg(2,j)
    i=0
    function ret = f(n,X); global m; /
        ret = [X(2),X(3),-(m+1)/2*X(1)*X(3)+m*X(2)*X(2)-m]; /
    endfunction
    [n,X]=rk4('f',[0,(nstep-1)*dstep],[0,0,g1],dstep);
    t1=X(nstep,2)

```

```

g2=dguess*g1
[n,X]=rk4('f',[0,(nstep-1)*dstep],[0,0,g2],dstep);
t2=X(nstep,2)
while (abs(t2-target) > toll)
    g=g2+(g2-g1)*(target-t2)/(t2-t1)
    [n,X]=rk4('f',[0,(nstep-1)*dstep],[0,0,g],dstep);
    t1=t2
    t2=X(nstep,2)
    g1=g2
    g2=g
    i++
    if (i>20)
        break
    endif
endwhile
ris_s(:,j+1)=X(:,2)
endfor
#-----
ris_s(:,1)=n
save ("-text", "falkner_ris.txt","ris_s" )
clearplot
title("Andamento del campo di velocita u/U Falkner-Skan")
ylabel("u/U")
xlabel("/Symbol h")
gset key bottom right
gset key box
maxeta=ceil(9/dstep)
grid
hold on
for j = 1:7
    etichetta = ";";
    etichetta = strcat(num2str(mg(1,j)),etichetta)
    etichetta = strcat(" -;m=", etichetta)
    eval( sprintf( /
        "plot (ris_s(1:maxeta,1),ris_s(1:maxeta,j+1), "%s )", etichetta))
# eval di sprintf perpassare la stringa etichetta alla funzione
# plot non supportata da octave
endfor
pause(5)
print('falkner_u.eps','-deps','-color')
print('falkner_u.fig','-dfig','-color')

```

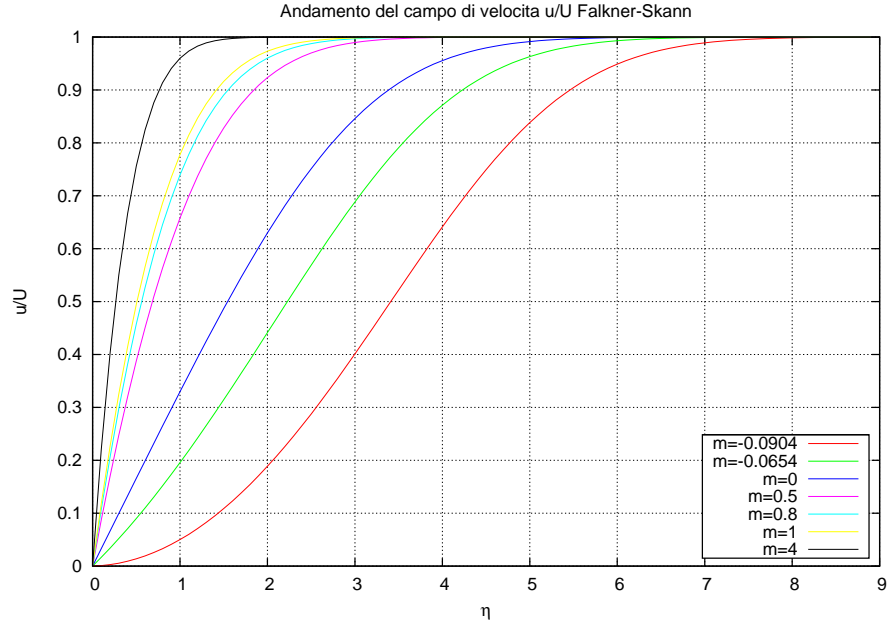


Figura 8.2: Profili di velocità F-S

e l'andamento grafico delle soluzioni fisicamente ammissibili parametrizzate in  $m$ .

È interessante fare alcune considerazioni sullo spessore di strato limite  $\delta_{0.99}$ :

$$\delta_{0.99} = \eta_{0.99}(m) \sqrt{\frac{\nu}{c}} x^{\frac{m-1}{m}} \quad (8.2)$$

che possono essere riassunte nel seguente schema:

$$\delta_{0.99} \begin{cases} m > 1 & \rightarrow \delta_{0.99} \downarrow \text{ con } x \uparrow \\ m = 1 & \rightarrow \delta_{0.99} = 2.4^1 \sqrt{\frac{\nu}{c}} \text{ costante} \\ m < 1 & \rightarrow \delta_{0.99} \uparrow \text{ con } x \uparrow \end{cases} \quad (8.3)$$

<sup>1</sup>Il valore 2.4 si ottiene dalla tabella dei valori numerici prodotta dal codice Octave.

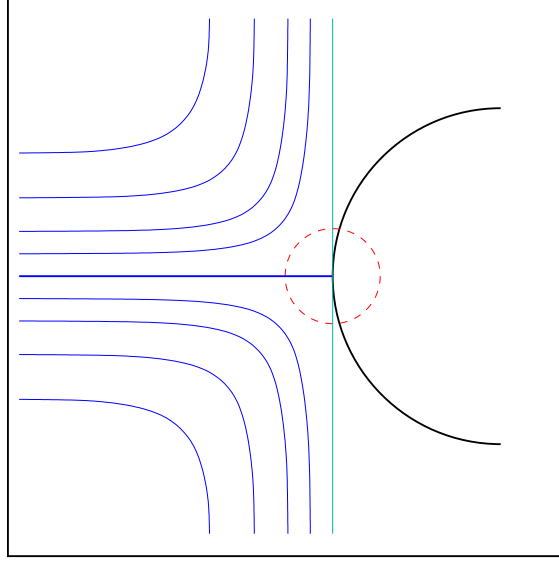


Figura 8.3: Campo di moto in prossimità del punto di arresto.

## 8.2 Strato limite al punto di arresto Stagnation point

La condizione di aderenza richiede che su qualsiasi punto della superficie di un solido immerso in un campo di moto, la velocità sia nulla. Per punto di arresto si intende quel punto particolare della superficie in cui la linea di corrente incidente è perpendicolare alla superficie stessa. Nel punto di arresto la velocità locale è nulla sia in presenza di fluido ideale che viscoso. Pur potendo essere curva ma non angolosa, la superficie in un intorno del punto di arresto, può essere in prima approssimazione essere ritenuta piana. Il campo di moto irrotazionale *esterno allo strato limite*, nell'intorno del punto di arresto, può essere ragionevolmente *ipotizzato* di tipo iperbolico con una funzione di corrente del tipo:

$$\Psi = k xy \quad (8.4)$$

con  $k > 0$  e:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} & v &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ u &= k x & v &= -k y \end{aligned}$$

All'*interno* dello strato limite:

$$\rho \vec{V} \cdot \text{grad} \vec{V} = \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

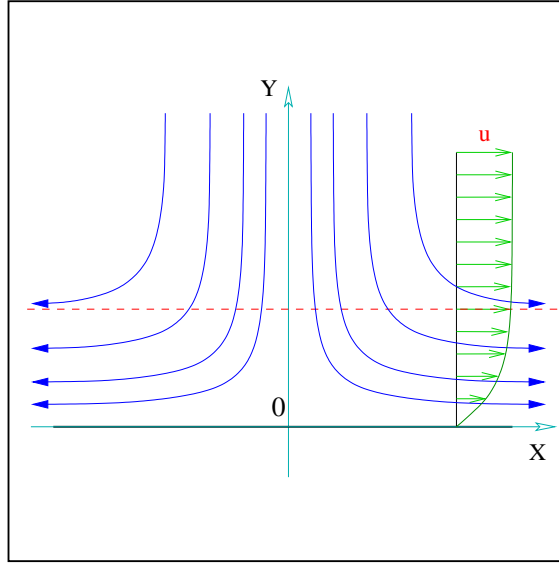


Figura 8.4: Andamento del campo di velocità

Si noti come l'equazione, in forma vettoriale non introduca le semplificazioni di Prandtl. Si assume l'assenza di forze di volume e la bidimensionalità del campo di moto, discendente dall'ipotesi fatta sulla funzione di corrente. Al fine di procedere alla ricerca di una soluzione del campo di moto all'interno dello strato limite si applica l'operatore rotore all'equazione appena scritta così da far sparire il termine dipendente dalla pressione (dipendente a sua volta sia da  $x$  che da  $y$ ):

$$\rho \nabla \wedge (\vec{V} \text{ grad} \vec{V}) = -\nabla \wedge \nabla P + \mu \nabla \wedge \nabla^2 \vec{V}$$

$$\rho \vec{V} (\nabla \wedge \text{grad} \vec{V}) = -\nabla \wedge \nabla P + \mu \nabla^2 (\nabla \wedge \vec{V})$$

$$\rho \vec{V} \text{ grad} \vec{\omega} = \mu \nabla^2 \vec{\omega}$$

La vorticità  $\vec{\omega}$  è un vettore perpendicolare al piano del moto, essendo il campo di moto bidimensionale, per cui si potrà scrivere:

$$\rho \vec{V} \nabla \omega = \mu \nabla^2 \omega$$

in cui il tensore del secondo ordine  $\text{grad} \vec{\omega}$  è diventato in effetti un vettore. Ci si è così ricondotti ad una unica equazione scalare:

$$\rho \left( u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

Si deve ora introdurre una *ulteriore ipotesi*, questa volta relativa ad un plausibile campo di moto *interno allo strato limite*<sup>2</sup>. Si ipotizzerà che la funzione di corrente, all'interno dello strato limite, continui ad essere dipendente linearmente da  $x$  ma dipendente da  $y$  secondo una funzione incognita. In questo modo si ipotizza che l'influenza dello strato limite sulla funzione di corrente dipenda solo dalla vicinanza al contorno solido:

$$\Psi = x f(y)$$

Con questa funzione di corrente si ottiene:

$$\begin{aligned} u &= x f'(y) \\ v &= -f(y) \\ \omega &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x f''(y) \end{aligned}$$

si può scrivere:

$$\begin{aligned} x f'(y) f''(y) - f(y) x f'''(y) &= \nu x f''''(y) \\ f'(y) f''(y) - f(y) f'''(y) &= \nu f''''(y) \end{aligned}$$

Integrando con le condizioni al contorno:

$$\text{c.c.} \left\{ \begin{array}{ll} f(y=0) = 0 & v \text{ a parete nulla} \\ f'(y=0) = 0 & u \text{ a parete nulla} \\ f(y \rightarrow \infty) \rightarrow k y & \text{nel campo irrotazionale} \end{array} \right.$$

e sostituendo:

$$\begin{aligned} \int f' f'' dy &= f' f' - \int f' f'' dy \\ &= \frac{1}{2} f'^2 \\ \int f f''' dy &= f f'' - \int f' f'' dy \\ &= f f'' - \frac{1}{2} f'^2 \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Cf.ta [4] pag. 287.

si ottiene:

$$f'^2 - ff'' - \nu f''' = \text{cost}$$

e finalmente sfruttando le c.c.:

$$f'^2 - ff'' - \nu f''' = k^2$$

Si può procedere ulteriormente col l'adimensionalizzazione introducendo le variabili:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{\nu}{k}} \eta & f(y) &= \sqrt{\nu k} F(\eta) \\ f' &= \sqrt{\nu k} F' \frac{d\eta}{dy} \\ &= \sqrt{\nu k} F' \sqrt{\frac{k}{\nu}} \\ &= k F' \\ f'' &= k \sqrt{\frac{k}{\nu}} F'' \\ f''' &= \frac{k^2}{\nu} F''' \end{aligned}$$

Si arriva in definitiva alla:

$$\boxed{F'^2 - FF'' - F''' = 1} \quad (8.5)$$

con le condizioni al contorno:

$$\text{c.c.} \left\{ \begin{array}{l} F(\eta = 0) = 0 \quad v \text{ a parete nulla} \\ F'(\eta = 0) = 0 \quad u \text{ a parete nulla} \\ F(\eta \rightarrow \infty) \rightarrow \eta \quad \text{nel campo irrotazionale} \end{array} \right. \quad (8.6)$$

Si vede che la Eq. (8.5) ha la forma della Eq. (8.1) con  $m = 1$ . In quest'ultima tuttavia  $f$  esprime la funzione di corrente adimensionata, mentre nel caso in studio  $F$  esprime la componente  $-v$  della velocità adimensionata; inoltre anche l'ultima delle condizioni al contorno è differente.

### 8.2.1 Soluzione

La soluzione si ottiene per via numerica sfruttando il codice Octave utilizzato in precedenza, modificando opportunamente le condizioni al contorno.

---

```
#Pierpaolo Garofalo 2008
#Risoluzione del campo di moto stazionario incompressibile
#al punto di arresto limite laminare, campo esterno Psi=kxy:
#y''' = - y y'' + y'^2 - 1
#che diventa:
#y=X(1)
#y'=X(2)                -> X(1)'=X(2)
#y''=X(3)               -> X(2)'=X(3)
#y'''=- X(1)X(3) + X(2)^2 - 1 -> X(3)'=- X(1)X(3) + X(2)^2 - 1
#Octave non ammette indice 0 nei vettori
#per cui si parte da X(1) con le condizioni iniziali:
#X(1)_o=0
#X(2)_o=0
#X(1)_infinito=eta questa viene sostituita dalla
#X(3)_o=guess (valore di prova. Si prova con valori diversi
#             fino a quando la X(1)_inf=eta. Ci si è così
#             ricondotti ad un sistema ai valori iniziali)
#Risolta con la tecnica dello shooting
#L'algoritmo è molto sensibile ai valori di tentativo
global m=1          ; guess=1.232
global etamax=30
dguess=1.000001
toll=0.0000001
target=etamax
dstep=0.1
nstep=ceil(etamax/dstep)+1
ris_s=zeros(nstep,4) #eta x(1) x(2) x(3)
g1=guess
i=0
function ret = f(n,X); global m; ret = [X(2),X(3),/
    -(m+1)/2*X(1)*X(3)+m*X(2)*X(2)-m]; endfunction
[n,X]=rk4('f',[0,(nstep-1)*dstep],[0,0,g1],dstep);
t1=X(nstep,1)
g2=dguess*g1
[n,X]=rk4('f',[0,(nstep-1)*dstep],[0,0,g2],dstep);
t2=X(nstep,1)
while (abs(t2-target) > toll)
```

```

    g=g2+(g2-g1)*(target-t2)/(t2-t1)
    [n,X]=rk4('f',[0,(nstep-1)*dstep],[0,0,g],dstep);
    t1=t2
    t2=X(nstep,1)
    g1=g2
    g2=g
    i++
    if (i>20)
        break
    endif
endwhile
ris_s(:,2:4)=X(:,1:3)
#-----
ris_s(:,1)=n
save ("-text", "punto_arresto.txt","ris_s" )
clearplot
title("Andamento del campo di velocita punto di arresto")
ylabel("F F'")
xlabel("/Symbol h")
gset key bottom right
gset key box
maxeta=ceil(3.2/dstep)
grid
hold on
plot (ris_s(1:maxeta,1),ris_s(1:maxeta,2),"-;F=-v;", /
      ris_s(1:maxeta,1),ris_s(1:maxeta,3),"-;F'=u;" )
pause(5)
print('punto_arresto_F.eps','-deps','-color')
print('punto_arresto_F.fig','-dfig','-color')

```

L'analisi dei risultati numerici permette di ottenere l'espressione dello spessore di strato limite  $y = \delta_{0.99}$ .

```

# Created by Octave 2.1.73, Sat Aug 30 13:44:08 2008 CEST <pier@asus>
# name: ris_s
# type: matrix
# rows: 301
# columns: 4
0      0      0      1.23265875011609
0.1 0.00599694363549 0.118271958680511 1.13290198439211
0.2 0.02332405676304 0.226626563533735 1.03452576476198

```

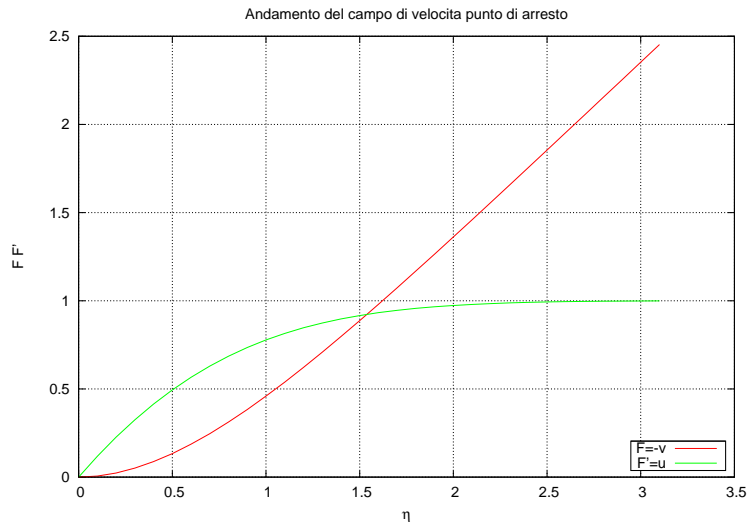


Figura 8.5: Soluzione campo di moto al punto di arresto.

0.3	0.05099855396261	0.32526235760977	0.93870351749122	
0.4	0.08806301427760	0.414484596484151	0.84639892778083	
0.5	0.13359503226056	0.494685124223964	0.75838280694620	
.				
.				
.				
2.2	1.55798754858643	0.984116623942698	0.04227308298009	
2.3	1.65659517296147	0.987887953135175	0.03345362485361	
2.4	1.75553869000084	0.990862094859132	0.02628383501299	<-----
2.5	1.85474618875965	0.993190902588203	0.02050618484958	

Dalla tabella sopra si vede che:

$$u/U = (xf')/(kx) = f'/k = F' = 0.99$$

si ha in corrispondenza di:

$$\eta = \delta_{0.99} \sqrt{\frac{k}{\nu}} = 2.4$$

per cui:

$$\delta_{0.99} = 2.4 \sqrt{\frac{\nu}{k}} \tag{8.7}$$

Si vede come lo spessore sia costante<sup>3</sup> ed indipendente dalla  $x$ . Si vede anche come il suo valore dipenda:

- dal fenomeno convettivo (rappresentato da  $k$ ) che tende a spingere verso la superficie solida
- dal fenomeno diffusivo (legato alla viscosità  $\nu$ ) che tende a diffondere verso l'esterno

la quantità di moto.

Questi due contributi si equilibrano dando vita ad uno strato limite di spessore costante più o meno spesso secondo la predominanza dei fenomeni viscosi diffusivi o convettivi. Sia elaborando ulteriormente i risultati numerici, che osservando la Fig. 8.5, si nota che  $u$  non tende asintoticamente a  $\eta$ . Si perviene invece ai seguenti risultati:

$$\eta \rightarrow \infty \left\{ \begin{array}{l} F \sim \eta - 0.65 \\ u \sim kx \\ v \sim k(y - \delta_1) \\ \delta^* \sim 0.65 \sqrt{\frac{\nu}{k}} \end{array} \right.$$

Come sopra detto la prima non concorda con l'ultima delle c.c. (8.6). L'espressione dello spessore di spostamento  $\delta^*$  viene ricavata integrando numericamente i risultati ottenuti. Si osserva come la presenza dello strato limite influenzi il campo di moto irrotazionale ed il particolare la componente  $v$ . Questa influenza era stata completamente trascurata nell'adottare la (8.4) come funzione di corrente nel campo esterno (ipotesi tra l'altro alla base dello studio dell'intorno del punto di arresto in aerodinamica). ***La modifica del campo esterno indotta dalla presenza dello strato limite consiste in una traslazione rigida del campo di velocità all'esterno del contorno pari proprio al valore dello spessore di spostamento  $\delta^*$ , ma non ne influenza la distribuzione.***

---

<sup>3</sup>Cf.ta con le (8.3)

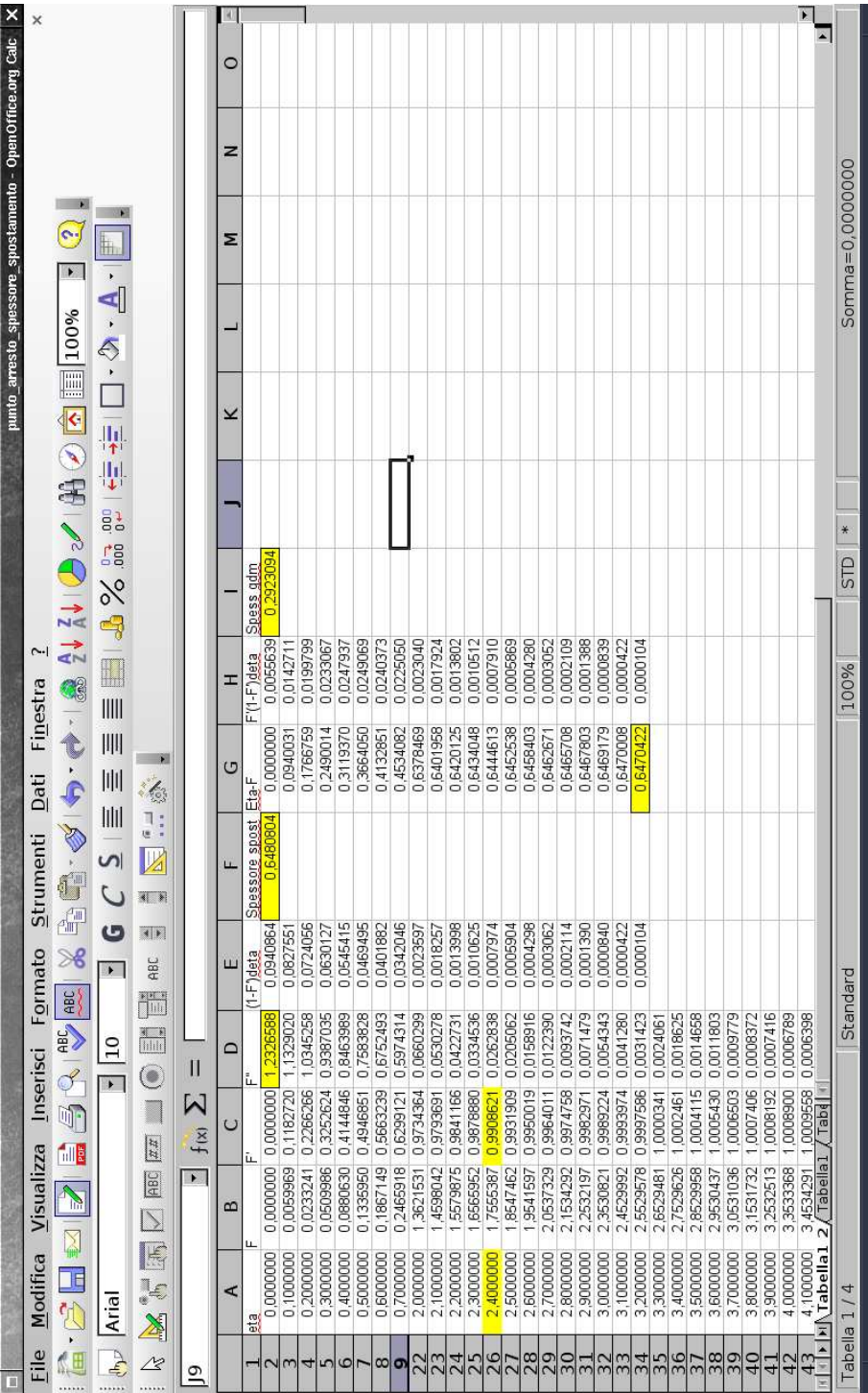


Figura 8.6: Openoffice: integrazione risultati numerici.

### 8.2.2 Parametri dell'atto di moto al punto di arresto

Si può procedere al calcolo di tutti gli altri parametri di interesse sfruttando i risultati numerici ottenuti:

$$\begin{aligned}\eta(F' = 0.99) &= 2.4 \\ F''(\eta = 0) &= 1.2327 \\ \int (1 - F') \Delta\eta &= 0.648 \\ \int F'(1 - F') \Delta\eta &= 0.292\end{aligned}$$

#### Spessore di strato limite

Per chiarezza se ne ripete il calcolo:

$$u/U = (xf')/(kx) = f'/k = F' = 0.99$$

si ha in corrispondenza di:

$$\eta = \delta_{0.99} \sqrt{\frac{k}{\nu}} = 2.4$$

per cui:

$$\begin{aligned}\delta_{0.99} &= 2.4 \sqrt{\frac{\nu}{k}} \\ &= 2.4 x \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e_x}}\end{aligned}$$

$$\frac{\delta}{x} \sqrt{\mathcal{R}e_x} = 2.4 \tag{8.8}$$

Spessore di spostamento

$$\begin{aligned}
 \delta^* &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \\
 &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{xf'}{kx}\right) \sqrt{\frac{\nu}{k}} d\eta \\
 &= \sqrt{\frac{\nu}{k}} \int_0^\infty \left(1 - \frac{kF'}{k}\right) d\eta \\
 &= \sqrt{\frac{\nu}{k}} \int_0^\infty (1 - F') d\eta \\
 &= 0.648 \sqrt{\frac{\nu}{k}} \\
 &= 0.648 \sqrt{\frac{\nu x^2}{kx^2}} \\
 &= 0.648 x \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \\
 &= 0.648 x \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e_x}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\delta^*}{x} \sqrt{\mathcal{R}e_x} = 0.648 \tag{8.9}$$

Spessore di quantità di moto

$$\begin{aligned}
 \vartheta &= \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \\
 &= \int_0^\infty \frac{xf'}{kx} \left(1 - \frac{xf'}{kx}\right) \sqrt{\frac{\nu}{k}} d\eta \\
 &= \sqrt{\frac{\nu}{k}} \int_0^\infty \frac{kF'}{k} \left(1 - \frac{kF'}{k}\right) d\eta \\
 &= \sqrt{\frac{\nu}{k}} \int_0^\infty F' (1 - F') d\eta \\
 &= 0.292 \sqrt{\frac{\nu}{k}} \\
 &= 0.292 \sqrt{\frac{\nu x^2}{kx^2}} \\
 &= 0.292 x \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \\
 &= 0.292 x \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e_x}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\vartheta}{x} \sqrt{\mathcal{R}e_x} = 0.292 \tag{8.10}$$

## Coefficiente di frizione a parete

$$\begin{aligned}
C_F &= \frac{\tau_P}{\frac{1}{2}\rho U^2} \\
&= \frac{\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_P}{\frac{1}{2}\rho U^2} \\
&= \frac{\mu (x f'')_P}{\frac{1}{2}\rho U^2} \\
&= \mu \frac{x \frac{k\sqrt{k}}{\sqrt{\nu}} F''}{\frac{1}{2}\rho U^2} \Big|_P \\
&= \frac{2\sqrt{\nu k} F''(0)}{U} \\
&= 2F''(0) \sqrt{\frac{\nu k}{U^2}} \\
&= 2F''(0) \sqrt{\frac{\nu k}{kxU}} \\
&= 2F''(0) \sqrt{\frac{\nu}{xU}} \\
&= 2F''(0) \frac{1}{\sqrt{\mathcal{R}e_x}}
\end{aligned}$$

$$C_F \sqrt{\mathcal{R}e_x} = 2.464 \quad (8.11)$$

## Fattore di forma

$$H = \frac{\delta^*}{\vartheta} = 2.22 \quad (8.12)$$

## 8.3 Separazione laminare

Il problema della separazione laminare è stato già visto in 4.5 relativamente al moto tra due piastre parallele: si suppone che la separazione avvenga allorché il gradiente di pressione (positivo) diventa tale da annullare la frizione a parete. Relativamente alla soluzione di Falkner e Skan si osserva sia dalla Fig. 8.2 che dai risultati prodotti dal codice di calcolo, che tale condizione, che prevede l'annullamento della derivata  $f''$  a parete, si ottiene con un profilo

di velocità caratterizzato dal valore:

$$m = -0.0905$$

Anche in questo caso si possono calcolare i parametri caratteristici dell'atto di moto sfruttando i risultati numerici ottenuti:

$$\begin{aligned}\eta(f' = 0.99) &= 7.2 \\ f''(\eta = 0) &= 0 \\ \int (1 - f') \Delta\eta &= 3.4922 \\ \int f'(1 - f') \Delta\eta &= 0.8659\end{aligned}$$

### 8.3.1 Spessore di strato limite

Il valore:

$$u/U = f' = 0.99$$

si ha in corrispondenza di:

$$\eta_{0.99} = 7.2$$

per cui:

$$\frac{\delta}{x} \sqrt{\mathcal{R}e_x} = 7.2 \quad (8.13)$$

### 8.3.2 Spessore di spostamento

$$\frac{\delta^*}{x} \sqrt{\mathcal{R}e_x} = 3.492 \quad (8.14)$$

### 8.3.3 Spessore di quantità di moto

$$\frac{\vartheta}{x} \sqrt{\mathcal{R}e_x} = 0.8659 \quad (8.15)$$

### 8.3.4 Coefficiente di frizione a parete

$$C_F \sqrt{\mathcal{R}e_x} = 0 \quad (8.16)$$

### 8.3.5 Fattore di forma

$$H = \frac{\delta^*}{\vartheta} = 4.03 \quad (8.17)$$

## 8.4 Evoluzione dello s.l. dal punto di arresto alla separazione

Giova riportare in una tabella tutti i parametri dello strato limite studiati, partendo dal punto di arresto, procedendo con la lastra piana di Blasius, per arrivare al punto di separazione laminare.

Parametri di strato limite dal punto di arresto alla separazione laminare						
Atto di moto	$U_e$	$\frac{\delta_{0.99}}{x} \sqrt{\mathcal{R}e_x}$	$\frac{\delta^*}{x} \sqrt{\mathcal{R}e_x}$	$\frac{\vartheta}{x} \sqrt{\mathcal{R}e_x}$	H	$C_F \sqrt{\mathcal{R}e_x}$
Punto di arresto	$cx$	2.4	0.648	0.292	2.22	2.464
Lastra piana	$U$	5	1.717	0.66	2.6	0.664
Separazione	$cx^{-0.0905}$	7.2	3.492	0.866	4.03	0

Tabella 8.1: Parametri di strato limite.

# Capitolo 9

## Transizione da moto laminare a turbolento

### 9.1 Caratteristiche dei moti turbolenti

Nella maggior parte dei casi pratici di interesse ingegneristico il flusso del moto è di tipo turbolento. I flussi turbolenti sono caratterizzati da alcune caratteristiche comuni che possono essere riassunte nei seguenti punti:

- è presente nel moto turbolento un andamento vorticoso generalizzato che coinvolge indistinte parti di fluido, definite in letteratura *eddies*, di grandezza estremamente variabile, presenti in vari punti in seno al fluido in diversi istanti;
- il contorno che separa la zona turbolenta da quella non turbolenta è ben definita, in un dato istante di osservazione, tuttavia i punti vicini al contorno di separazione possono essere intermittentemente turbolenti o no;
- la turbolenza è un fenomeno caratterizzato da una instabilità casuale. L'analisi armonica di un moto turbolento mostra come le fluttuazioni del moto si redistribuiscano in un ampio range di frequenze;
- il fenomeno della turbolenza è sempre di tipo *tridimensionale*, nonostante il campo di moto sia bidimensionale;
- le fluttuazioni locali in un moto turbolento possono essere caratterizzate da variazioni il cui ordine di grandezza non sono assolutamente trascurabili (né spaziali né temporali). Le fluttuazioni della velocità locale nel fluido che investe un corpo tozzo possono essere dell'ordine della stessa velocità libera.

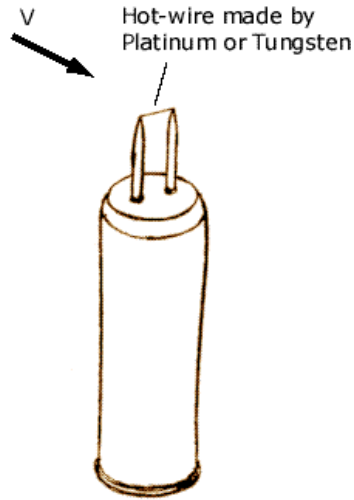


Figura 9.1: Tipico anemometro a filo caldo

### 9.1.1 L'anemometro a filo caldo

L'anemometro a filo caldo<sup>1</sup> è uno strumento che permette la misurazione della fluttuazione della velocità locale all'interno di un campo di moto turbolento. Esso è costituito da un filo conduttore estremamente sottile ( $10^{-3}mm$ ) teso trasversalmente nel campo di moto ed attraversato da una corrente elettrica che lo scalda ad una temperatura leggermente superiore a quella del fluido. Il fluido che lo lambisce asporta una quantità di calore dipendente dalla velocità e variandone la caratteristica elettrica. Con una elettronica affidabile ed un filo molto sottile, risulta possibile apprezzare perfino le variazioni più rapide e piccole nel moto turbolento. Ai confini della regione turbolenta il flusso sarebbe percepito intermittenemente turbolento. Tale intermittenza definita come la frazione del tempo di osservazione durante la quale il flusso è turbolento. La velocità media del fluido in un dato punto per un dato intervallo di osservazione è definita da:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(x, y, z) dt \quad (9.1)$$

in cui  $T_0$  è un tempo molto maggiore del periodo più lungo delle fluttuazioni rilevate. La velocità istantanea può essere vista come somma del valor medio e della parte fluttuante:

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z) + u'(x, y, z, t)$$

<sup>1</sup>Si veda [http://en.wikipedia.org/wiki/Hot-wire\\_anemometry#Hot-wire\\_anemometers](http://en.wikipedia.org/wiki/Hot-wire_anemometry#Hot-wire_anemometers)

Il rapporto tra il valore quadratico medio della componente fluttuante ed il valore medio  $U$  o  $U_\infty$  è chiamato ***intensità della turbolenza***:

$$\frac{\int_0^{T_0} \sqrt{u'^2}}{U_\infty}$$

## 9.2 Criteri di transizione

Problemi relativi alla conduzione del calore o al calcolo della resistenza di attrito sono fortemente influenzati dal tipo di moto, laminare o turbolento, nel fluido che lambisce una superficie solida. È fondamentale, quindi, prima di tutto conoscere lo stato moto. A tal fine si può ricorrere a dei criteri che permettono la predizione della transizione dal regime laminare a quello turbolento. Un ruolo fondamentale nella transizione lo ha il numero di Reynolds  $\mathcal{R}_e$ .

### 9.2.1 Il numero di Reynolds

Rappresenta il rapporto tra le forze d'inerzia e viscosi in gioco nell'atto di moto. Alti numeri di Reynolds caratterizzano atti di moto in cui l'azione delle forze d'inerzia è preponderante su quella delle forze viscosi: moti turbolenti. Bassi numeri di Reynolds caratterizzano atti di moto in cui l'azione delle forze d'viscosi è preponderante su quella delle forze d'inerzia: moti laminari.

$$\mathcal{R}_e = \frac{F_i}{F_v}$$

Indicando con  $D$  una dimensione caratteristica del problema:

$$F_i = m a = \rho D^3 \frac{D}{t^2}$$

$$F_v = \mu \frac{dV}{dL} S = \mu \frac{D}{t} D^2$$

Il rapporto tra le due forze fornisce l'espressione generale del numero di Reynolds relativo alla dimensione geometrica caratteristica del problema:

$$\boxed{\mathcal{R}_e = \frac{\rho V D}{\mu}} \quad (9.2)$$

L'esperienza di Reynolds mostrò come la transizione avveniva allorché il numero  $\mathcal{R}_e$  superava un valore critico. Purtroppo tale valore è molto sensibile alle condizioni al contorno. Si vede che nei tubi tale valore è circa

$\mathcal{R}_e = 2300$  ma che curando particolarmente la “pulizia” condizioni di ingresso del fluido nel tubo il regime laminare può essere mantenuto fino a valori  $\mathcal{R}_e = 20000$ . La sensibilità dei risultati ottenuti dalle condizioni di ingresso spiega lo sparpagliamento dei dati sperimentali ottenuti da esperienze apparentemente simili.

### 9.3 Criterio di Michel $\mathcal{Re}_\theta$

Il criterio di Michel (1952) è un criterio molto semplice sulla predizione della transizione basato sul numero di Reynolds riferito allo spessore di quantità di moto e sul numero di Reynolds locale nel punto in cui avviene la transizione:

$$\mathcal{Re}_{\theta,trans} = 2.9 \mathcal{Re}_{x,trans}^{0.4} \quad (9.3)$$

La relazione  $\theta(x)$  può essere ottenuta per esempio dalla Eq. 6.17 di Thwaites. Si valuta il legame tra  $\mathcal{Re}_\theta$  e  $\mathcal{Re}_x$  e quindi il valore di  $\mathcal{Re}_{x,trans}$  dalla relazione di Michel.

Nel caso della lastra piana si può utilizzare la soluzione esatta di Blasius 7.5:

$$\vartheta = 0.66 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

e quindi ottenere:

$$\mathcal{Re}_\theta = 0.66 \mathcal{Re}_x^{0.5}$$

Sostituendo nella relazione di Michel:

$$0.66 \mathcal{Re}_{x,trans}^{0.5} = 2.9 \mathcal{Re}_{x,trans}^{0.4}$$

e risolvendo numericamente:

$$\mathcal{Re}_{x,trans} \approx 2.682 \times 10^6$$

I risultati del criterio di Michel sono affidabili al  $\pm(30\% \div 50\%)$ .

### 9.4 Teoria idrodinamica della stabilità : l'equazione di Orr-Sommerfeld

L'osservazione del fenomeno della turbolenza mostra come questo sia il risultato finale della nascita e dello sviluppo di piccole perturbazioni casuali in seno al flusso, tranne che nel caso ovvio in cui tale processo sia bypassato dalla presenza di forti perturbazioni.

Si può ovviamente immaginare come esistano circostanze limite al di sotto delle quali le perturbazioni risultano smorzate, ed al di sopra delle quali risultano amplificate. Il numero di Reynolds rappresenta quindi un parametro certamente discriminante nell'instaurarsi del regime turbolento, poiché come detto in 9.2.1 esso rappresenta il rapporto tra le forze d'inerzia e viscosi che regolano il moto.

In generale interessa studiare il caso tridimensionale di nascita e sviluppo delle piccole perturbazioni ma, tenendo conto del teorema di Squire secondo il quale i disturbi bidimensionali sono sempre più instabili di quelli tridimensionali, lo studio del caso bidimensionale fornirebbe certamente una soluzione conservativa, oltre che più facilmente perseguibile. Le principali esemplificazioni introdotte saranno:

- studio del caso bidimensionale in quanto più critico del caso tridimensionale;
- l'ampiezza del disturbo di velocità è molto più piccola del valor medio. Inoltre l'ipotesi  $V_0 = 0$  definisce l'*approssimazione di flusso parallelo*:

$$\begin{aligned} u &= U_0 + \hat{u} \\ v &= \hat{v} \\ p &= P_0 + \hat{p} \\ \hat{u} &\ll U_0 \\ \hat{p} &\ll P_0 \end{aligned}$$

- i termini di disturbo di ordine  $o(2)$  sono trascurabili;
- la velocità base del flusso  $U_0$  è funzione della sola  $y$ :

$$U_0 = U_0(y)$$

- la funzione di corrente del disturbo viene espressa in forma complessa:

$$\psi(x, y, t) = \phi(y) \exp[i\alpha (x - ct)] \quad (9.4)$$

separando le variabili ed in forma sinusoidale. La forma del disturbo  $\phi(y)$  ha carattere oscillatorio nel tempo  $t$  e nella direzione  $x$  se entrambe  $\alpha$  e  $\alpha c = \omega$  sono complessi. Si studia l'evoluzione temporale del disturbo se invece il numero d'onda è rappresentato da un valore reale  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$  in cui  $\lambda$  rappresenta la lunghezza d'onda del disturbo nella direzione  $x$ , mentre  $c$  è la velocità di fase complessa  $c = (c_r + i c_i)$ . Se  $(\alpha c_i) > 0$  allora si ha l'amplificazione nel tempo del disturbo e la

condizione di instabilità. Discorso analogo vale nel caso in cui si consideri  $\alpha$  complesso, con valutazione della eventuale amplificazione del disturbo oscillatorio nello spazio. Se si considerano sia  $\alpha$  che  $\omega$  reali allora il disturbo ha ampiezza di oscillazione costante sia nello spazio che nel tempo.

La componente secondo  $x$  del disturbo di velocità sarà :

$$\hat{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \exp [i\alpha(x - ct)]$$

$$\hat{u} = \phi' e^{(\cdot)}$$

mentre secondo  $y$ :

$$\hat{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\alpha \phi \exp [i\alpha(x - ct)]$$

$$\hat{v} = -i\alpha \phi e^{(\cdot)}$$

$$\begin{cases} \hat{u} = \phi' e^{(\cdot)} \\ \hat{v} = -i\alpha \phi e^{(\cdot)} \end{cases} \quad (9.5)$$

Si riprendono le equazioni di Eq. 3.1 Navier-Stokes applicate ad un flusso bidimensionale incompressibile:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \nabla u \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \nabla v \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \end{cases} \quad (9.6)$$

Sostituendo le espressioni delle componenti della velocità :

$$\frac{\partial(U_0 + \hat{u})}{\partial t} + (U_0 + \hat{u}) \frac{\partial(U_0 + \hat{u})}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial(U_0 + \hat{u})}{\partial y} =$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial(P_0 + \hat{p})}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2(U_0 + \hat{u})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(U_0 + \hat{u})}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + (U_0 + \hat{u}) \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} =$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial(P_0 + \hat{p})}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} \right)$$

$$\begin{aligned} & \left( U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial U_0}{\partial t} \right) + U_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial U_0}{\partial y} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \\ & \left[ -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \nu \left( \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} \right) \right] - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \nu \left( \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & U_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = \\ & -\frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{\rho} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \frac{1}{\rho} + \nu \left( \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

I termini:

$$\left( U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial U_0}{\partial t} \right) = \left[ -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \nu \left( \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \frac{1}{\rho} = 0$$

rappresentano l'equazione di Navier-Stokes alla componente media del flusso, quindi automaticamente soddisfatti. Il termine  $U_0$  dipende per ipotesi dalla

sola  $y$  quindi  $\frac{\partial U_0}{\partial x} = 0$ . I termini del secondo ordine  $\hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}$ ,  $\hat{v}\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}$ ,  $\hat{u}\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}$ ,  $\hat{v}\frac{\partial \hat{v}}{\partial y}$  saranno come da ipotesi trascurati. Le equazioni di Navier-Stokes diventano:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial U_0}{\partial y} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \nu \left( \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \frac{1}{\rho} + \nu \left( \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (9.7)$$

A questo punto si possono sostituire le espressioni di  $\hat{u}$  e  $\hat{v}$ :

$$\begin{cases} -i\alpha c \phi' e^{(\cdot)} + U_0 i\alpha \phi' e^{(\cdot)} - i\alpha \phi e^{(\cdot)} U_0' = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \nu \left[ \phi' (i\alpha)^2 e^{(\cdot)} + \phi''' e^{(\cdot)} \right] \\ -i\alpha \phi (-i\alpha c) e^{(\cdot)} + U_0 (-i\alpha) \phi (i\alpha) e^{(\cdot)} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \nu \left[ (i\alpha) \phi (i\alpha)^2 e^{(\cdot)} - i\alpha \phi'' e^{(\cdot)} \right] \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli:

$$\begin{cases} -i\alpha c \phi' e^{(\cdot)} + U_0 i\alpha \phi' e^{(\cdot)} - i\alpha \phi e^{(\cdot)} U_0' = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \nu \left[ \phi' (i\alpha)^2 e^{(\cdot)} + \phi''' e^{(\cdot)} \right] \\ -\alpha^2 \phi c e^{(\cdot)} + U_0 \alpha^2 \phi e^{(\cdot)} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \frac{1}{\rho} + \nu \left[ -\alpha^3 \phi e^{(\cdot)} - i\alpha \phi'' e^{(\cdot)} \right] \end{cases}$$

e derivando la prima rispetto a  $y$  e la seconda rispetto a  $x$ :

$$\begin{cases} -i\alpha c \phi'' e^{(\cdot)} + U_0' i\alpha \phi' e^{(\cdot)} + U_0 i\alpha \phi'' e^{(\cdot)} - i\alpha \phi' e^{(\cdot)} U_0' - i\alpha \phi e^{(\cdot)} U_0'' = \\ -\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x \partial y} \frac{1}{\rho} + \nu \left[ \phi'' (i\alpha)^2 e^{(\cdot)} + \phi'''' e^{(\cdot)} \right] \\ -\alpha^2 \phi c (i\alpha) e^{(\cdot)} + U_0 \alpha^2 \phi (i\alpha) e^{(\cdot)} = \\ -\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x \partial y} \frac{1}{\rho} + \nu \left[ -\alpha^3 \phi (i\alpha) e^{(\cdot)} - i\alpha \phi'' (i\alpha) e^{(\cdot)} \right] \end{cases}$$

semplificando, sottraendo la seconda equazione dalla prima e dividendo per  $(i\alpha)$ :

$$\begin{aligned} -\alpha^2 c \phi + U_0 \alpha^2 \phi + c \phi'' - U_0 \phi'' + U_0'' \phi &= \nu (-\alpha^4 \phi + \alpha^2 \phi'' + \alpha^2 \phi'' - \phi'''' ) \frac{1}{i\alpha} \\ \phi (U_0 - c) \alpha^2 + \phi'' (U_0 - c) + \phi U_0'' &= \nu (-\alpha^4 \phi + 2\alpha^2 \phi'' - \phi'''' ) \frac{-i}{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (U_0 - c)(\phi\alpha^2 + \phi'') + \phi U_0'' &= \frac{i\nu}{\alpha} (\phi'''' - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi) \\ (U_0 - c)(\phi'' - \phi\alpha^2) - \phi U_0'' &= \frac{-i\nu}{\alpha} (\phi'''' - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi) \end{aligned} \quad (9.8)$$

L'equazione così ottenuta può essere scritta in termini adimensionali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^* = \frac{\phi}{U_m D} \quad \phi'^* = \frac{\phi'}{U_m} \quad \phi''^* = \frac{\phi'' D}{U_m} \quad \phi'''^* = \frac{\phi''' D^2}{U_m} \quad \phi''''^* = \frac{\phi'''' D^3}{U_m} \\ U^* = \frac{U_0}{U_m} \quad U_0'^* = \frac{U_0' D}{U_m} \quad U_0''^* = \frac{U_0'' D^2}{U_m} \\ \alpha^* = \alpha D \\ c^* = \frac{c}{U_m} \\ \nu^* = \frac{\nu}{U_m D} = \frac{1}{Re} \end{array} \right.$$

$$\frac{D}{U_m^2} \left[ (U_0 - c)(\phi'' - \phi\alpha^2) - \phi U_0'' \right] = \frac{-i\nu}{\alpha} (\phi'''' - 2\alpha^2\phi'' + \alpha^4\phi) \frac{D}{U_m^2}$$

$$\boxed{(U_0^* - c^*)(\phi^{*''} - \phi^* \alpha^{*2}) - \phi^* U_0^{*''} = \frac{-i}{\alpha^* Re} (\phi^{*''''} - 2\alpha^{*2} \phi^{*''} + \alpha^{*4} \phi^*)} \quad (9.9)$$

La Eq. 9.9 rappresenta l'*equazione di Orr-Sommerfeld*.  $U_m$  e  $D$  rappresentano rispettivamente la velocità massima nel flusso e una dimensione caratteristica del flusso medio (ad esempio la larghezza del condotto) oppure dello strato limite (ad esempio lo spessore dello strato limite). Essa non è di facile soluzione soprattutto nel caso di profilo  $U_0(y)$  generico. Per una soluzione numerica della Eq. 9.9 si veda ad esempio [8] o anche [9].

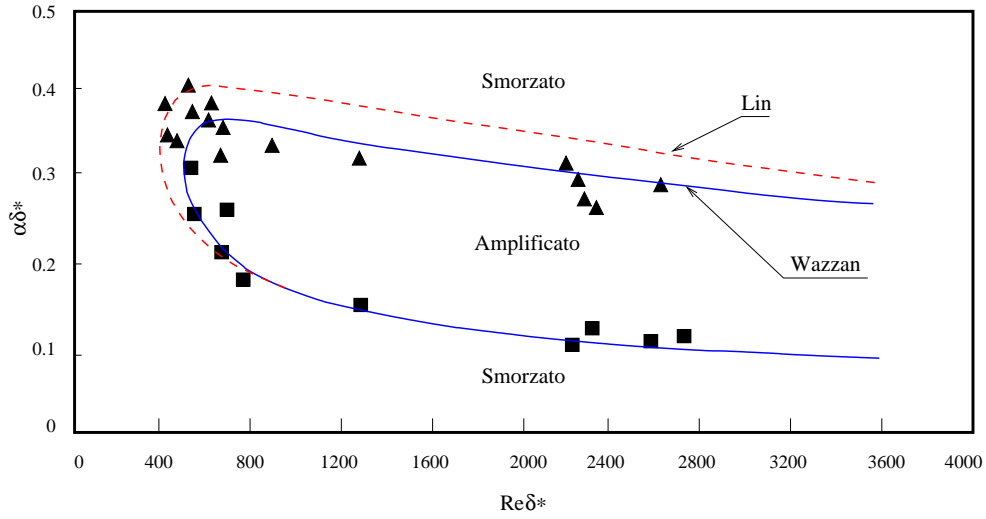


Figura 9.2: Lastra piana: confronto tra i dati di Lin e Wazzan ottenuti con la teoria idrodinamica della stabilità e le misure sperimentali di Schubauer e Skramstad.

Lin (1945) usò a tale proposito la via della teoria asintotica, mentre Wazzan (1968) percorse la strada della soluzione numerica diretta. Schubauer e Skramstad (1947) procedettero ponendo dei nastri metallici magnetici sottili nello strato limite laminare di una piastra piana. Eccitarono questi nastri facendoli vibrare al fine di produrre dei disturbi di lunghezza d'onda nota. L'accordo tra i dati teorici e sperimentali è mostrato in figura Fig. 9.2. Si può notare come ad un dato valore del  $Re_{\delta^*}$  basato sullo spessore di spostamento, corrispondano un valore minimo e massimo del parametro  $\alpha\delta^*$  delimitanti una zona instabile di amplificazione delle perturbazioni. Dato che il valore di  $\alpha\delta^*$  è generalmente sconosciuto, si considera la situazione limite  $(Re_{\delta^*})_{crit} = 530$  e  $\alpha\delta^* \approx 0.3$ . La lunghezza d'onda dei disturbi instabili è grande rispetto allo spessore dello strato limite, infatti la lunghezza d'onda minima per l'instaurazione dell'instabilità nel caso di lastra piana:

$$\alpha \delta^* = \frac{2 \pi}{\lambda} \delta^* = 0.3$$

riprendendo i dati della soluzione esatta di Blasius di Tab. 7.1:

$$\frac{2 \pi}{\lambda} \frac{1.7172}{5} \delta = 0.3$$

$$\boxed{\lambda \approx 7 \delta}$$

Queste onde prendono il nome di **onde di Tollmein-Schlichting** dal nome dei ricercatori che contribuirono allo sviluppo della teoria.

Sfortunatamente però l'insorgere della instabilità del flusso non coincide necessariamente con la transizione.

## 9.5 Il metodo $e^N$

È un metodo euristico di predizione della transizione sviluppato da Jaffe nel 1970. Si basa sull'idea razionale, seppur non totalmente rigorosa secondo la quale esiste un punto di stabilità neutro al di sopra del quale l'amplificazione dei disturbi cresce rapidamente: l'instaurarsi di piccoli disturbi bidimensionali porta alla nascita di disturbi tridimensionali e successivamente allo sviluppo del regime turbolento. Il metodo  $e^N$ , operante su disturbi bidimensionali, valuta l'evoluzione dell'amplificazione del disturbo nel flusso lungo la superficie, a valle del punto di stabilità neutra, integrandolo e cercando di ottenere un valore universale per  $N$  che indichi la transizione. Bisognerà dapprima analizzare l'andamento spaziale dei piccoli disturbi, piuttosto che quello temporale. I due saranno identici solo nel caso di stabilità neutra. Il parametro  $\alpha$  sarà un numero complesso la cui parte immaginaria  $\alpha_i$  rappresenta il fattore di amplificazione.

Il procedimento di attuazione del metodo procede attraverso passi successivi:

1. per un dato campo di velocità esterno allo strato limite, per assegnate condizioni al contorno e numero di Reynolds, si determina il profilo di velocità (e la sua derivata seconda) nello strato limite stesso e si risolverà successivamente l'equazione Eq. 9.9 di Orr-Sommerfeld ottenendo una mappa delimitante la zona di stabilità analoga alla Fig. 9.2;
2. il secondo passo consisterà nella generazione di un profilo di velocità laminare il più accurato possibile in varie stazioni lungo la superficie di contatto  $U_0(y)$ , dal punto di arresto fino a ben oltre la stazione di calcolo dove ci si aspetta la transizione. Il calcolo di stabilità verrà fatto partire da un valore del  $\mathcal{Re}_{\delta^*}$  leggermente più grande del  $\mathcal{Re}_{\delta_{cr}^*}$  su un punto del ramo inferiore della curva a dito di Fig. 9.2 corrispondente ad una certa coordinata  $x = x_1$ . Ripetendo il calcolo per punti successivi con frequenze differenti<sup>2</sup> si perverrà al diagramma di Fig. 9.3.;
3. il terzo passo consisterà nell'implementare il metodo, vedere se i risultati teorici concordano con quelli sperimentali e portano ad un valore

<sup>2</sup>Per la descrizione del metodo si veda [9], Sec. 8.3 pag. 253.

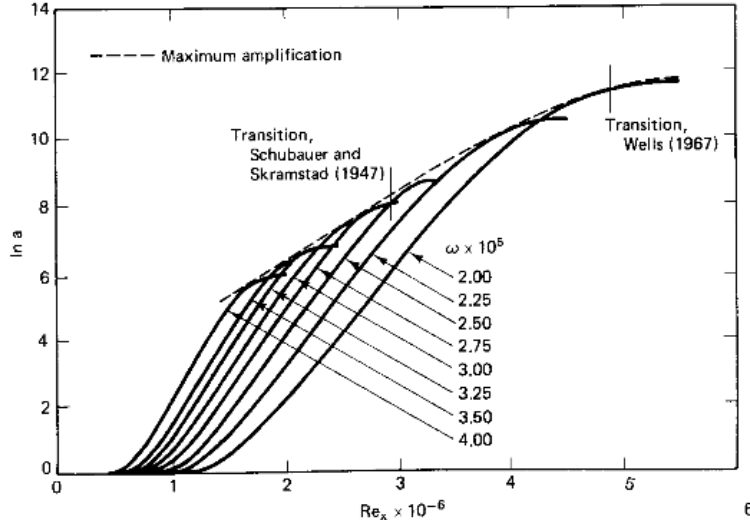


Figura 9.3: Lastra piana: Andamento dell'amplificazione alle varie frequenze di disturbo. (Da Jaffe, 1970)

universale del fattore di amplificazione che può essere adottato come criterio per la predizione della transizione.

Il numero  $N$  tiene conto del rapporto, ad una data frequenza, tra l'ampiezza del disturbo ad una data ascissa oltre il punto neutro, e l'ampiezza nel punto neutro stesso di stabilità :

$$\frac{A}{A_0} = e^N \quad (9.10)$$

in cui:

$$N = - \int_{x_n}^x \alpha_i(x') dx' \quad (9.11)$$

Un ampio confronto tra risultati numerici e sperimentali su corpi di varia forma ha portato ad assumere un valore medio:

$$N \approx 10$$

tuttavia recentemente si tende a preferire un approccio differente secondo il quale si cerca piuttosto di determinare il valore di  $N$  che permette di avere un riscontro positivo con i dati sperimentali.

# Appendice A

## Richiami sui vettori

### A.1 Derivata di versori in coordinate cilindriche

$$\frac{\partial \vec{i}_{(r,\theta,z)}}{\partial (r,z)} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{i}_r}{\partial \theta} = \vec{i}_\theta$$

$$\frac{\partial \vec{i}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{i}_r$$

$$\frac{\partial \vec{i}_z}{\partial \theta} = 0$$

### A.2 Gradiente

#### A.2.1 Coordinate cartesiane ortogonali

$$\nabla(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(\dots)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(\dots)}{\partial z} \vec{k}$$

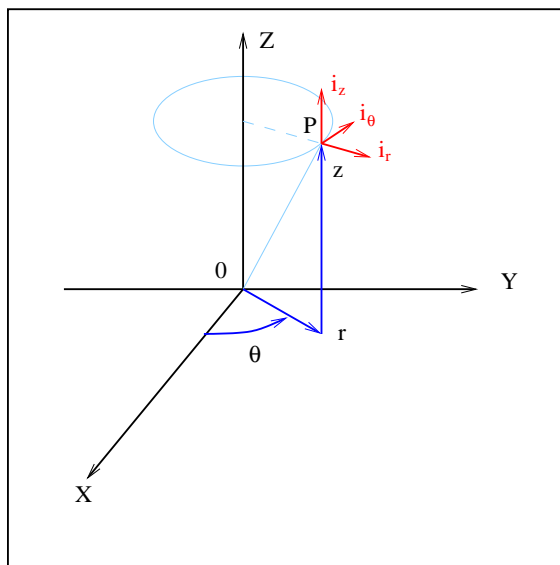


Figura A.1: Coordinate cilindriche.

### A.2.2 Coordinate cilindriche

$$\nabla(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(\dots)}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{\partial(\dots)}{\partial z} \vec{i}_z$$

## A.3 Laplaciano

### A.3.1 Laplaciano di uno scalare

#### Coordinate cartesiane ortogonali

L'espressione del laplaciano in coordinate ortogonali cartesiane è banale.

$$\nabla^2(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial z^2}$$

#### Coordinate cilindriche

Nel ricavare l'espressione del laplaciano in coordinate cilindriche si deve fare qualche passaggio in più dovendo tener conto delle derivate dei versori.

$$\begin{aligned}
\nabla^2(\dots) &= \left( \frac{\partial(\dots)}{\partial r} \vec{t}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(\dots)}{\partial \theta} \vec{t}_\theta + \frac{\partial(\dots)}{\partial z} \vec{t}_z \right) \cdot \left( \frac{\partial(\dots)}{\partial r} \vec{t}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(\dots)}{\partial \theta} \vec{t}_\theta + \frac{\partial(\dots)}{\partial z} \vec{t}_z \right) \\
&= \frac{\partial^2(\dots)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial z^2} + \vec{t}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \vec{t}_r \frac{\partial(\dots)}{\partial r} \right) + \vec{t}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \vec{t}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial(\dots)}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad + \vec{t}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \vec{t}_z \frac{\partial(\dots)}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial^2(\dots)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial z^2} + \vec{t}_\theta \vec{t}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial(\dots)}{\partial r} + \vec{t}_\theta \vec{t}_\theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \theta^2}
\end{aligned}$$

$$\nabla^2(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\dots)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial z^2}$$

### A.3.2 Laplaciano di un vettore

Coordinate cartesiane ortogonali

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \vec{V} &= \left( \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial z^2} \right) \cdot \vec{V} \\
 &= \frac{\partial^2(u\vec{i})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(v\vec{j})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(w\vec{k})}{\partial x^2} + \\
 &\quad + \frac{\partial^2(u\vec{i})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(v\vec{j})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(w\vec{k})}{\partial y^2} + \\
 &\quad + \frac{\partial^2(u\vec{i})}{\partial z^2} + \frac{\partial^2(v\vec{j})}{\partial z^2} + \frac{\partial^2(w\vec{k})}{\partial z^2} \\
 &= \vec{i} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\
 &\quad + \vec{j} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \\
 &\quad + \vec{k} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \vec{V} = \vec{i} \nabla^2(u) + \vec{j} \nabla^2(v) + \vec{k} \nabla^2(w)$$

## Coordinate cilindriche

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \vec{V} &= \left( \frac{\partial^2(\dots)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\dots)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial z^2} \right) \cdot \vec{V} \\
&= \frac{\partial^2(u_r \vec{r}_r)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2(u_\theta \vec{r}_\theta)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2(u_z \vec{r}_z)}{\partial r^2} + \\
&\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(u_r \vec{r}_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_\theta \vec{r}_\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z \vec{r}_z)}{\partial r} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2(u_r \vec{r}_r)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2(u_\theta \vec{r}_\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2(u_z \vec{r}_z)}{\partial \theta^2} \right) + \\
&\quad + \frac{\partial^2(u_r \vec{r}_r)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2(u_\theta \vec{r}_\theta)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2(u_z \vec{r}_z)}{\partial z^2} \\
&= \vec{r}_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \vec{r}_\theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \vec{r}_z \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \\
&\quad + \frac{1}{r} \left( \vec{r}_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \vec{r}_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \vec{r}_z \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \vec{r}_r \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_r \vec{r}_\theta + \vec{r}_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - u_\theta \vec{r}_r + \vec{r}_z \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad + \vec{r}_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \vec{r}_\theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \vec{r}_z \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{i}_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \vec{i}_\theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \vec{i}_z \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \\
&\quad + \frac{1}{r} \left( \vec{i}_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \vec{i}_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \vec{i}_z \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{r^2} \left( \vec{i}_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \vec{i}_\theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \vec{i}_\theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \vec{i}_r u_r + \right. \\
&\quad \left. + \vec{i}_\theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \vec{i}_r \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - u_\theta \vec{i}_\theta - \vec{i}_r \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \vec{i}_z \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) + \\
&\quad \vec{i}_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \vec{i}_\theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \vec{i}_z \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \\
&= \vec{i}_r \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \\
&\quad + \vec{i}_\theta \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \\
&\quad + \vec{i}_\theta \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \\
&\nabla^2 \vec{V} = \vec{i}_r \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \vec{i}_\theta \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \vec{i}_\theta (\nabla^2 u_z)
\end{aligned} \tag{A.1}$$

## A.4 Divergenza

### A.4.1 Coordinate cartesiane ortogonali

$$\nabla \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

## A.4.2 Coordinate cilindriche

$$\begin{aligned}
\nabla \vec{V} &= \left( \frac{\partial(\dots)}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(\dots)}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{\partial(\dots)}{\partial z} \vec{i}_z \right) \cdot \vec{V} \\
&= \left( \frac{\partial(u_r \vec{i}_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_\theta \vec{i}_\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z \vec{i}_z)}{\partial r} \right) \vec{i}_r + \\
&\quad + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(u_r \vec{i}_r)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta \vec{i}_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_z \vec{i}_z)}{\partial \theta} \right) \vec{i}_\theta + \\
&\quad + \left( \frac{\partial(u_r \vec{i}_r)}{\partial z} + \frac{\partial(u_\theta \vec{i}_\theta)}{\partial z} + \frac{\partial(u_z \vec{i}_z)}{\partial z} \right) \vec{i}_z \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\nabla \vec{V} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

## A.5 Rotore

### A.5.1 Coordinate cartesiane ortogonali

$$\begin{aligned}
 \nabla \wedge \vec{V} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \wedge (u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}) \\
 &= \vec{i} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + \vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial v}{\partial x} \vec{k} - \frac{\partial w}{\partial x} \vec{j} - \frac{\partial u}{\partial y} \vec{k} + \frac{\partial w}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{j} - \frac{\partial v}{\partial z} \vec{i} \\
 &= \vec{i} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

## A.5.2 Coordinate cilindriche

$$\begin{aligned}
\nabla \wedge \vec{V} &= \left( \frac{\partial}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{i}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{i}_z \right) \wedge (u_r \vec{i}_r + u_\theta \vec{i}_\theta + u_z \vec{i}_z) \\
&= \vec{i}_r \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{i}_\theta \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial \theta} + \vec{i}_z \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \\
&= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \vec{i}_z + \frac{\partial u_z}{\partial r} \vec{i}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{i}_z + \frac{u_\theta}{r} \vec{i}_z + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \vec{i}_r + \\
&\quad + \frac{\partial u_r}{\partial z} \vec{i}_\theta - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \vec{i}_r \\
&= \vec{i}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) + \\
&\quad + \vec{i}_\theta \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \\
&\quad + \vec{i}_z \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \right) \\
&= \vec{i}_r \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - r \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) + \vec{i}_\theta \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \vec{i}_z \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\
&\quad \nabla \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \vec{i}_r & \vec{i}_\theta & \frac{1}{r} \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_r & r u_\theta & u_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

### A.5.3 $\vec{\omega} \wedge \vec{V}$

Ricordando che:

$$\vec{\omega} = \nabla \wedge \vec{V}$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i}_r & \vec{i}_\theta & \vec{i}_z \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - r \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) & \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ u_r & u_\theta & u_z \end{vmatrix}$$

Svolgendo i calcoli e riorganizzando:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \vec{V} &= \vec{i}_r \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - u_z \frac{\partial u_z}{\partial r} - u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} \right] + \\ &\quad \vec{i}_\theta \left[ u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_z}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right] + \\ &\quad \vec{i}_z \left[ u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} - u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} - u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - u_r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] \\ &= \vec{i}_r \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} \right] + \\ &\quad \vec{i}_\theta \left[ u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \frac{1}{2r} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right] + \\ &\quad \vec{i}_z \left[ u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

# Appendice B

## Teoremi utili

### B.1 Teorema di trasformazione di Reynolds

Il teorema di trasformazione di Reynolds è di fondamentale importanza. Esso permette di passare facilmente dall'espressione generica del teorema della quantità di moto alla sua versione sotto la forma delle equazioni di *Navier-Stokes*.

La derivata totale, ossia *Lagrangiana* di una grandezza viene in virtù di tale teorema, espressa in termini delle sue componenti parziali.

**Teorema 1** (di Reynolds)

*Sia  $B$  una grandezza estensiva legata a  $b$  intensiva che ne rappresenta il valore per unità di volume di controllo  $V_c$  avente superficie di contorno  $S_c$ :*

$$B = \int_{V_c} b \rho dv$$

e  $\frac{D}{Dt}$  la derivata totale o Lagrangiana di  $B$ :

$$\frac{DB}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B(t + \delta t) - B(t)}{\delta t}$$

*allora:*

$$\boxed{\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} b \rho dv + \int_{S_c} b \rho \vec{V} \vec{n} dS} \quad (\text{B.1})$$

La derivata totale di una grandezza intensiva computata su di un volume di controllo  $V_c$  viene vista come somma della variazione della grandezza nel suo volume di controllo nel tempo, e del flusso netto della grandezza stessa

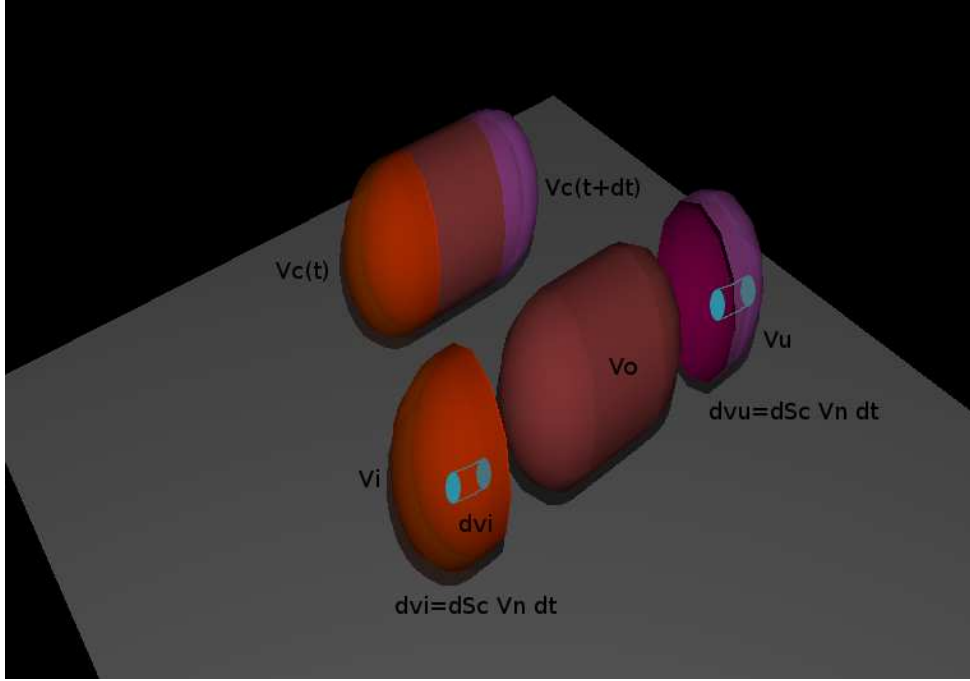


Figura B.1: Volume di controllo  $V_c$  tra gli istanti iniziale e finale di osservazione.

attraverso la superficie di controllo che racchiude il volume. In questo modo il punto di osservazione si sgancia dal volume di controllo in moto  $V_c$  che racchiude la grandezza estensiva (**punto di vista Lagrangiano**) e passa ad un volume di controllo fisso nello spazio  $V_o$  rispetto al quale vengono espresse le componenti di derivazione parziale (**punto di vista Euleriano**)<sup>1</sup>.

Si segua il volume di controllo  $V_c$  tra gli istanti  $t$  e  $\delta t$ . Guardando la Fig. B.1 si vede che se si considera lo spostamento infinitesimo subito nella sua evoluzione da  $V_c$ , si potrà individuare una zona di sovrapposizione  $V_o$ , una zona competente a  $V_c$  osservato all'istante  $t$  indicata con  $V_i$  ed una zona competente a  $V_c$  osservato all'istante  $t+\delta t$  indicata con  $V_u$ . Queste due zone,  $V_i$  e  $V_u$  possono essere viste rispettivamente come volumi in ingresso e in uscita della grandezza intensiva nel volume  $V_o$  visto come fisso nell'intervallo di tempo  $\delta t$ . La grandezza estensiva  $B$  espressa nell'istante iniziale sarà :

$$B(t) = \int_{V_o(t)} b \rho \, dv + \int_{V_i} b \rho \, dv$$

<sup>1</sup>Vedi Fig.B.1

e nell'istante finale:

$$B(t + \delta t) = \int_{Vo(t+\delta t)} b \rho \, dv + \int_{Vu} b \rho \, dv$$

La derivata totale della grandezza  $B$  sarà dunque:

$$\frac{DB}{Dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{Vo(t+\delta t)} b \rho \, dv + \int_{Vu} b \rho \, dv - \int_{Vo(t)} b \rho \, dv - \int_{Vi} b \rho \, dv}{\delta t}$$

Se si introduce l'ipotesi di considerare  $Vo^2$  costante nel tempo allora:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{Vo(t+\delta t)} b \rho \, dv - \int_{Vo(t)} b \rho \, dv}{\delta t} = \\ \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{(\int_{Vo} b \rho \, dv)_{t+\delta t} - (\int_{Vo} b \rho \, dv)_t}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{Vo} b \rho \, dv \end{aligned}$$

Per quanto riguarda gli integrali di volume su  $Vi$  e  $Vu$ , integrando per *fili* su  $Sci$  ed  $Scu$ , ossia le porzioni di superficie di controllo  $Sc$  del volume fisso  $Vo$  attraverso cui entra ed esce il flusso della grandezza  $b \rho$ :

$$\begin{aligned} \int_{Vu(t+\delta t)} b \rho \, dv &= \int_{Scu(t+\delta t)} b \rho \, Vn \, dScu \, \delta t \\ \int_{Vi(t)} b \rho \, dv &= \int_{Sci(t)} b \rho \, Vn \, dSci \, \delta t \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{\int_{Scu} b \rho \, \vec{n} \vec{V} \, dScu + \int_{Sci} b \rho \, \vec{n} \vec{V} \, dSci}{\delta t} \right] \delta t = \int_{Sc} b \rho \, \vec{n} \vec{V} \, dSc$$

avendo adottato la convenzione secondo la quale il versore normale  $\vec{n}$  è positivo se uscente dalla superficie, ossia:

$$Vn = -\vec{V} \vec{n} \text{ su } Sci$$

$$Vn = \vec{V} \vec{n} \text{ su } Scu$$

Da quanto sopra risulta quindi dimostrata l'Eq. (B.1).

---

<sup>2</sup> $Vo = Vc(t) \cap Vc(t + \delta t)$

## B.2 Teorema di Gauss

Forma vettoriale:

$$\int_S \vec{\phi} \cdot \vec{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \vec{\phi} \, dv \quad (\text{B.2})$$

Forma scalare:

$$\int_S \phi_i n_i \, dS = \int_V \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} dv \Big|_{(i=1,2,3)} \quad (\text{B.3})$$

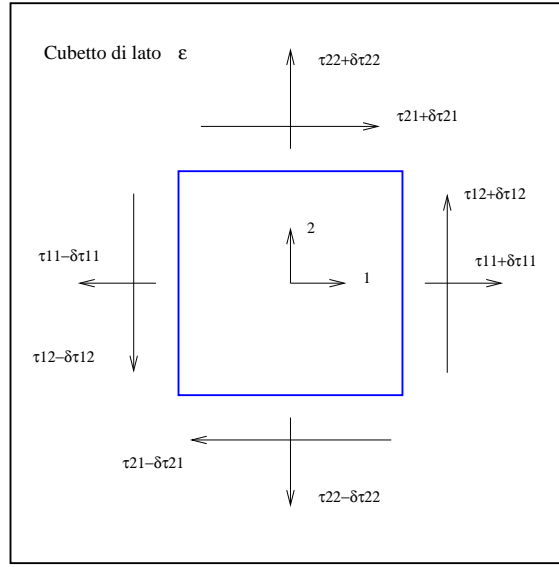
### B.2.1 Corollario

Forma vettoriale:

$$\int_S f \vec{n} \, dS = \int_V \nabla f \, dv \quad (\text{B.4})$$

Forma scalare:

$$\int_S f n_i \, ds = \int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dv \Big|_{(i=1,2,3)} \quad (\text{B.5})$$

Figura B.2: Cubetto elementare di lato  $\varepsilon$ 

## B.3 Teorema di reciprocità di Cauchy

L'equaglianza:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

deriva dalla scrittura delle equazioni di equilibrio alla rotazione del cubetto elementare. Si consideri l'origine delle coordinate centrata nel baricentro<sup>3</sup>.

$$\frac{1}{2} I \dot{\omega}^2 = (\tau_{12} - d\tau_{12}) \varepsilon^2 \frac{\varepsilon}{2} + (\tau_{12} + d\tau_{12}) \varepsilon^2 \frac{\varepsilon}{2} - (\tau_{21} - d\tau_{21}) \varepsilon^2 \frac{\varepsilon}{2} - (\tau_{21} + d\tau_{21}) \varepsilon^2 \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\tau_{12} \frac{\varepsilon^3}{2} - \tau_{21} \frac{\varepsilon^3}{2} = \frac{1}{2} \rho \varepsilon^5 \dot{\omega}^2$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$  e semplificando:

$$\tau_{12} - \tau_{21} = 0 \quad (\text{B.6})$$

<sup>3</sup>Le forze di volume avranno così braccio nullo.

## Appendice C

### Considerazioni sul rotore della velocità

$$\nabla \wedge \vec{V}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} &= \vec{i}_1 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) - \vec{i}_2 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \vec{i}_3 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ &= \vec{i}_1 \omega_1 + \vec{i}_2 \omega_2 + \vec{i}_3 \omega_3 \\ &= \nabla \wedge \vec{V} \\ &= \vec{\omega} \end{aligned} \quad (C.2)$$

Dalla Fig. C.1 si nota come le componenti del vettore rotore della velocità rappresentino le componenti del vettore rotazione nell'unità di tempo.  $\vec{\omega}$  rappresenta quindi la velocità di rotazione di corpo rigido dell'elemento intorno al punto  $P_0$

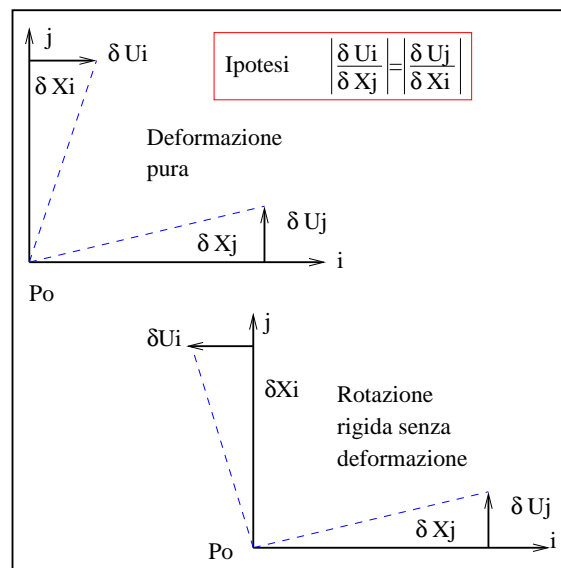


Figura C.1: Stato di deformazione e rotazione rigida pure.

# Appendice D

## Similitudine

La similitudine tra fenomeni e/o sistemi fisici risulta molto utile qualora si vogliano ottenere dei risultati relativi al comportamento del sistema in studio, procedendo sperimentalmente su un modello in scala ridotta.

### *Similitudine fisica*

La similitudine fisica tra “modello” e “vero” si ha quando le caratteristiche fisiche di uno possono essere dedotte dalle caratteristiche dell’altro attraverso una conversione che passi attraverso un fattore di scala.

### *Analogia*

Sussiste tra due fenomeni e/o sistemi fisici diversi il cui comportamento è regolato da equazioni formalmente identiche (si ricordi per esempio l’analoga elettromeccanica tra sistemi massa, molla, smorzatore ed i sistemi L, C, R dell’elettrotecnica). La similitudine fisica tra due fenomeni è un caso particolare di analogia.

Un esempio importante di analogia è quello sussistente tra *modello matematico* e *modello fisico*.

### *Modello matematico*

Per mezzo dell’analogia che sussiste tra il modello fisico e quello matematico, il comportamento del primo può essere dedotto risolvendo il secondo.

Il modello matematico di un sistema fisico è dato dal numero minimo di equazioni differenziali con le relative condizioni al contorno ed iniziali la cui soluzione fornisce un’insieme di funzioni capaci di descrivere completamente l’evoluzione spazio-temporale del sistema.

Dati quindi due sistemi fisici, “vero” e “modello” in similitudine fisica, ad essi saranno associati due modelli matematici che, adimensionalizzati, risulteranno identici. Si intuisce che, affinché sussista similitudine

tra vero e modello, dovranno sussistere la similitudine geometrica, della distribuzione delle masse, delle forze ecc.

Si può quindi affermare che:

***esiste similitudine tra modello e vero se i rispettivi modelli matematici a variabili adimensionate sono identici.***

L'analisi dimensionale si basa sul principio fondamentale in base al quale una qualsiasi relazione o equazione matematica deve essere coerente dal punto di vista dimensionale (si ricordi l'esempio del maestro che alla scuola elementare che ripeteva che le pere vanno sommate con le pere, le mele con le mele ecc.); tutti i termini di un'equazione devono avere quindi la stessa dimensione: dividendo ciascuno dei termini dell'equazione per uno di essi, si ottiene una equazione adimensionale.

Si consideri una semplice equazione:

$$Ax + By + C = 0$$

in cui i singoli termini  $Ax$ ,  $By$ ,  $C$ , dovranno essere coerenti dimensionalmente. Si introducano le variabili adimensionate  $x' = x/K$ ,  $y' = y/L$ :

$$AKx' + BLy' + C = 0$$

Dividendo l'espressione nelle variabili adimensionate  $x'$  e  $y'$  per  $AK$  si otterrà una equazione adimensionata:

$$x' + \frac{BL}{AK}y' + \frac{C}{AK} = 0$$

I termini  $\frac{BL}{AK}$  e  $\frac{C}{AK}$  prendono il nome di **gruppi adimensionali**.

***La condizione necessaria affinché modello e vero siano in similitudine è che siano uguali i gruppi adimensionali indipendenti meno uno.***

$$\text{Vero} \quad \varphi'_v(\Pi_1, \dots, \Pi_i) = 0 \rightarrow \Pi_i = g_v(\Pi_1, \dots, \Pi_{i-1})$$

$$\text{Modello} \quad \varphi'_m(\Pi_1, \dots, \Pi_i) = 0 \rightarrow \Pi_i = g_m(\Pi_1, \dots, \Pi_{i-1})$$

## D.1 Il teorema $\pi$ di Buckingham

**Teorema D.1.1** *Il numero di gruppi adimensionali indipendenti è pari al numero dei parametri influenti meno il numero delle grandezze fondamentali.*

$$i = n - q \tag{D.1}$$

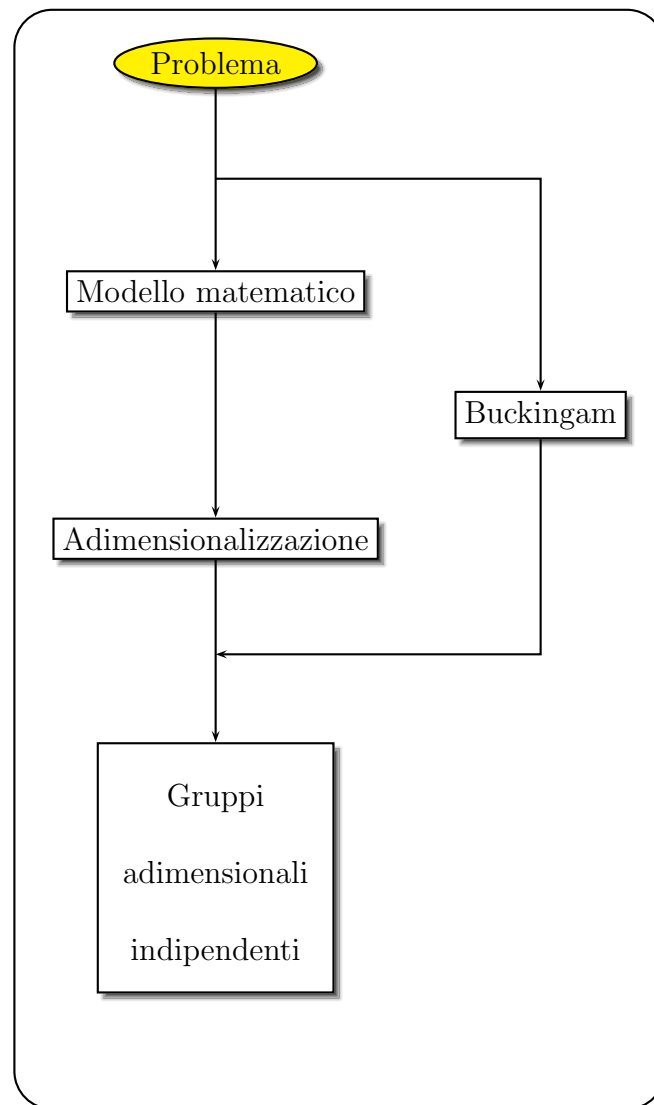


Tabella D.1: Il teorema di Buckingham e l'analisi dimensionale.

- (i)  $i$  numero dei gruppi adimensionali indipendenti;
- (ii)  $n$  numero delle grandezze fondamentali;
- (iii)  $q$  numero delle grandezze fondamentali che compaiono nel problema ( $q = 1$  problema geometrico  $[l]$ ,  $q = 2$  problema cinematico  $[l, t]$ ,  $q = 3$  problema dinamico  $[l, m, t]$  ecc.).

**Dim:** Sia  $\varphi$  l'espressione matematica della grandezza della quale si vogliono ricavare i valori numerici tramite lo studio del modello in similitudine:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

in cui  $x_i$  sono i parametri influenti sul sistema. Procedendo all'adimensionalizzazione dell'espressione sopra si otterrà :

$$\varphi'(\Pi_1, \dots, \Pi_i) = 0$$

in cui  $\Pi$  sono gli "i" gruppi adimensionali indipendenti. Il generico elemento  $\Pi_j$  sarà stato ottenuto a partire da un prodotto delle grandezze  $x$  ciascuna elevata ad una data potenza per cui in generale si potrà dire:

$$\Pi_j = (x_1^{\alpha_{1j}} \dots x_n^{\alpha_{nj}})$$

Le grandezze  $x$  a loro volta potranno essere espresse come prodotto delle  $q$  grandezze fondamentali  $U$  del problema elevate alle potenze  $\beta$  note:

$$x_j = U_1^{\beta_{1j}} \dots U_q^{\beta_{qj}}$$

Si potrà allora scrivere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 = (U_1^{\beta_{11}} \dots U_q^{\beta_{q1}})^{\alpha_{11}} \dots (U_1^{\beta_{1n}} \dots U_q^{\beta_{qn}})^{\alpha_{n1}} \\ \vdots = \vdots \\ \Pi_i = (U_1^{\beta_{11}} \dots U_q^{\beta_{q1}})^{\alpha_{1i}} \dots (U_1^{\beta_{1n}} \dots U_q^{\beta_{qn}})^{\alpha_{ni}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_1 = U_1^{(\beta_{11}\alpha_{11} + \dots + \beta_{1n}\alpha_{n1})} \dots U_q^{(\beta_{q1}\alpha_{11} + \dots + \beta_{qn}\alpha_{n1})} \\ \vdots = \vdots \\ \Pi_i = U_1^{(\beta_{11}\alpha_{1i} + \dots + \beta_{1n}\alpha_{ni})} \dots U_q^{(\beta_{q1}\alpha_{1i} + \dots + \beta_{qn}\alpha_{ni})} \end{array} \right.$$

*Poiché tutti i gruppi  $\Pi$  sono adimensionali, tutti gli esponenti delle grandezze fondamentali  $U$  dovranno essere nulli:*

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \left\{ \begin{array}{l} \beta_{11}\alpha_{11} + \cdots + \beta_{1n}\alpha_{n1} = 0 \\ \vdots = \vdots \\ \beta_{q1}\alpha_{11} + \cdots + \beta_{qn}\alpha_{n1} = 0 \end{array} \right. \\ \vdots \\ i \left\{ \begin{array}{l} \beta_{11}\alpha_{1i} + \cdots + \beta_{1n}\alpha_{ni} = 0 \\ \vdots = \vdots \\ \beta_{q1}\alpha_{1i} + \cdots + \beta_{qn}\alpha_{ni} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

*Si ottengono i sistemi lineari omogenei ciascuno costituito da  $q$  equazioni in  $n$  incognite. Si deduce quindi che per la soluzione dovranno essere fissati per ciascuno degli  $i$  sistemi  $(n - q)$  valori di  $\alpha$ . Dovendo essere tali  $(n-q)$ -ple indipendenti, esse dovranno essere proprio  $i$ :*

$$i = n - q$$

*Risulta pertanto dimostrata la **D.1**.*

# Appendice E

## Gruppi adimensionali notevoli

### E.1 Numero di Biot

Il numero di Biot (***Bi***), introdotto da Jean-Baptiste Biot (1774 - 1862), rientra tra i gruppi adimensionali usati in fluidodinamica. Il suo valore è dato dal rapporto tra la resistenza termica interna del sistema e quella tra la superficie esterna del sistema ed il mezzo circostante.

$$Bi = \frac{(h \cdot L)}{\lambda}$$

dove  $h$  è il coefficiente di scambio termico liminare [ $W/m^2K$ ],  $L$  è la lunghezza caratteristica, pari al rapporto tra il volume e la superficie del corpo e  $\lambda$  la conducibilità termica del solido [ $W/mK$ ]

Seppure la forma è la stessa del numero di Nusselt, in questo caso Biot pone al denominatore la conducibilità termica del corpo e non del fluido, pertanto fornisce informazioni non sul fluido di scambio ma sull'oggetto investito dal flusso. Molti problemi, dal punto di vista dell'analisi del flusso termico, possono essere risolti semplicemente se si ipotizza che la resistenza conduttiva interna sia piccola rispetto allo scambio termico conduttivo. Questa ipotesi, che si traduce dal punto di vista numerico in un  $Bi \ll 1$ , permette di considerare una distribuzione di temperatura sulla superficie del corpo del tutto uniforme.

### E.2 Numero di Nusselt

Il numero di Nusselt ***Nu*** è un gruppo adimensionale utilizzato nello studio dello scambio termico per convezione ed è definito da:

$$Nu_L = \frac{hL}{k_f}$$

dove:

- $L$  è una dimensione caratteristica;
- $k_f$  è la conducibilità termica del fluido;
- $h$  è il coefficiente di scambio termico convettivo liminare

È di particolare importanza nei problemi di convezione termica, in quanto la sua determinazione permette di conoscere il coefficiente di scambio termico convettivo fra il fluido e la parete.

Generalmente è considerato funzione del numero di Reynolds e del numero di Prandtl, a meno di un coefficiente  $C$  e degli esponenti  $n$  ed  $m$  a cui sono elevati gli altri due gruppi adimensionali.

## E.3 Numero di Prandtl

Il numero di Prandtl  $Pr$ , è un gruppo adimensionale utilizzato nei problemi di fluidodinamica e termodinamica relativi allo scambio termico per convezione ed è definito come segue:

$$Pr = \frac{\mu c}{\lambda}$$

in cui:

- $\mu$  è la viscosità dinamica;
- $c$  è il calore specifico;
- $\lambda$  è la conducibilità termica;

Il numero di Prandtl è perciò una caratteristica del fluido, e non dipende (a differenza di altri gruppi adimensionali) dal campo di moto considerato. Permette di misurare l'importanza relativa degli effetti viscosi rispetto alla diffusività termica. In altre parole, il numero di Prandtl rappresenta il rapporto tra la diffusività della quantità di moto e la diffusività termica.

Valori tipici del numero di Prandtl sono:

- circa 0,7 per l'aria e la maggior parte dei gas;
- tra 100 e 40.000 nel caso degli olii motore;
- circa 0,015 per il mercurio.

Deve il suo nome a quello del fisico tedesco Ludwig Prandtl.

## E.4 Numero di Reynolds

Il numero di Reynolds  $Re$  è un gruppo adimensionale usato in fluidodinamica, proporzionale al rapporto tra le forze d'inerzia e le forze viscosi. Nel caso più generale il numero di Reynolds è scritto come:

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu}$$

oppure:

$$Re = \frac{U L}{\nu}$$

dove:

- $U$  è la velocità media del fluido;
- $\mu$  è la viscosità dinamica;
- $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  è la viscosità cinematica;
- $\rho$  è la densità del fluido;
- $L$  è una lunghezza caratteristica del corpo (per il moto in condotti equivale al diametro  $2r$  se la sezione del condotto è circolare, altrimenti è pari al cosiddetto diametro equivalente o diametro idraulico)  $D_e = \frac{4S}{P}$  in cui:
  - $S$  è l'area della sezione;
  - $P$  è il perimetro bagnato.

Esso permette di valutare se il flusso di scorrimento di un fluido è in regime laminare o turbolento.

## E.5 Numero di Mach

Il numero di Mach  $Ma$  è un gruppo adimensionale definito come il rapporto tra una velocità e la velocità del suono nel fluido considerato:

$$Ma = \frac{v_o}{v_s}$$

in cui:

- $v_o$  è la velocità del corpo;

- $v_s$  è la velocità del suono nel fluido considerato.

Permette di stabilire quanto siano importanti gli effetti di comprimibilità del fluido in esame. Quando infatti il valore del numero di Mach è ridotto al di sotto del valore  $Ma = 0.3$  si commette un errore trascurabile considerando il valore della densità costante.

## E.6 Numero di Froude

Il numero di Froude ***Fr***, è un gruppo adimensionale che mette in relazione la forza d'inerzia e la forza peso. Deve il suo nome a quello dell'ingegnere idrodinamico ed architetto navale inglese William Froude (1810 - 1879).

La forza d'inerzia  $F$  può essere scritta, in base al secondo principio della dinamica, come prodotto tra massa e l'accelerazione:

$$F = m a = \frac{\rho L^4}{t^2}$$

Il peso  $P$  risulta essere il prodotto tra massa e l'accelerazione di gravità.

$$P = m g = \rho g L^3$$

Il rapporto tra le due forze:

$$\frac{F}{P} = \frac{L}{g t^2}$$

è proporzionale al numero di Froude:

$$Fr = \sqrt{\frac{V_0^2}{g L_0}}$$

dove:

- $\rho$  è la densità;
- $L_0$  è una lunghezza di riferimento;
- $V_0$  è una velocità di riferimento;
- $g$  è l'accelerazione di gravità di riferimento.

Il numero di Froude può essere anche espresso in funzione del numero di Richardson che è infatti il reciproco della sua radice quadrata.

## E.7 Numero di Knudsen

Il numero di Knudsen  $Kn$  è un gruppo adimensionale utilizzato in diversi campi della chimica e della fisica, definito come il rapporto tra il cammino libero medio molecolare  $\lambda$  e una lunghezza caratteristica  $L$  del problema fisico.

Può essere definito come:

$$Kn = \frac{\lambda}{L} = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \pi D^2 P L}$$

in cui:

- $T$  è una temperatura;
- $k_B$  è la costante di Boltzmann;
- $P$  è la pressione;
- $D$  è il diametro delle particelle;

Può inoltre essere ricavato come rapporto dei numeri di Mach e di Reynolds.

Il numero di Knudsen viene usato, in particolare in fluidodinamica, per definire il campo di validità dell'ipotesi del continuo nel fluido e quindi l'applicabilità delle equazioni di Navier-Stokes. Problemi per cui tale numero risulta essere di ordine di grandezza unitario o superiore non possono essere studiati con queste leggi.

Il suo nome deriva da quello del fisico danese Martin Knudsen (1871 - 1949).

# Bibliografia

- [1] S. Spataro e S. Tribulato *Equazioni Differenziali* - 1980 Collana Esami - Edizioni Tecnos S.r.l. MILANO.
- [2] H.B. Dwight *Tables of Integrals and Other Mathematical Data* - IV Edition - MacMillan NEW YORK.
- [3] J.H. Ferziger & M. Perić *Computational Methods for Fluid Dynamics* - III Edition - Sperling.
- [4] G.K. Batchelor F.R.S. *An Introduction to Fluid Dynamics* - Cambridge University Press.
- [5] E. Mattioli *Aerodinamica* - II Edizione - Levrotto & Bella - TORINO.
- [6] W.H. Press S.A. - Teukolsky W.T. - W.T. Vetterling - B.F. Flannery *Numerical Recipes in C "The Art of Scientific Computing"* - II Edition - Cambridge University Press.
- [7] J. A. Schetz *Boundary Layer Analysis* - Prentice Hall, Inc.
- [8] S. A. Orzag *Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation* - *Journal of Fluid Mechanics* (1971), vol. 50, part 4, pp. 689-703
- [9] T. Cebeci, J. P. Shao, F. Kafyeke, E. Laurendau *Computational Fluid Dynamics for Engineers* - Springer