

POLITECNICO DI TORINO

Facoltà di Ingegneria



Corso di Laurea in Ingegneria Aeronautica

Tesi di Laurea

**Modellizzazione del controllo
attivo della risposta strutturale
di elementi in materiale
composito.**

Relatori:

Prof. Di Sciuva Marco

Prof. Borello Lorenzo

Ing. Icardi Ugo

Candidato:

Garofalo Pierpaolo

Luglio 1992

Summary

La presente tesi è stata svolta nell'intento di sviluppare un modello teorico che consenta lo studio del comportamento dinamico di gusci in materiale composito, accoppiati con strati di materiale piezoelettrico che ne permettano il controllo attivo distribuito.

Il lavoro svolto risulta sostanzialmente diviso in due parti: nella prima vengono ricavate le equazioni di equilibrio del guscio composito, nella seconda tali equazioni vengono opportunamente modificate al fine di ottenere quelle del guscio controllato attivamente.

In particolare nel Capitolo:

1. vengono espone in breve le motivazioni che orientano l'interesse di molti ricercatori a muoversi nell'ambito del controllo attivo, per lo sviluppo di nuove metodologie atte allo studio delle cosiddette strutture *intelligenti*; vengono descritti i principali vantaggi dell'adozione delle metodologie di controllo attivo rispetto a quelle classiche di controllo passivo; vengono citati quegli articoli fondamentali, nell'ambito di una vasta, ormai, bibliografia, relativi alle problematiche che si presentano nel controllo di strutture mediante l'uso di attuatori in piezoelettrico.
2. vengono richiamati i concetti fondamentali di geometria differenziale delle superfici nello spazio, che sono utili, nei capitoli successivi, allo sviluppo della trattazione.
3. sono presentate le relazioni generali tra spostamenti e deformazioni.

-
4. dopo aver presentato il modello di spostamento sviluppato dal Prof. Di Sciuva [4], mediante il principio dei lavori virtuali vengono ricavate le equazioni del moto e le relative condizioni al contorno naturali e geometriche.
 5. vengono riportate le equazioni costitutive dei materiali piezoelettrici ed una giustificazione qualitativa del loro comportamento.
 6. si ricavano le equazioni del moto e le condizioni al contorno relative ad un guscio composito nella cui stratificazione siano presenti elementi in piezoelettrico; vengono riportate per esteso le espressioni delle risultanti di tensione di attuazione che compaiono nelle equazioni ricavate.
 7. sono richiamati i concetti basilari del controllo e delle funzioni dei vari apparati che in esso concorrono; viene riportato lo schema a blocchi del sistema struttura, sensore, attuatore, apparato elettronico di pilotaggio che permette di capire la logica con cui si esercita il controllo sulla struttura, in particolare i concetti di controllo in *feedback di velocità*, in *feedback di posizione*, e di *guadagno*.
 8. è svolto un semplice esercizio nel quale viene studiato il comportamento di una trave in plexiglas controllata in feedback di velocità. I risultati numerici sono confrontati con quelli ottenuti sperimentalmente e disponibili in letteratura.

In appendice viene fornita l'espressione del vettore dei carichi nodali, da utilizzare nel caso si voglia studiare il problema del controllo di elementi in composito per mezzo del metodo degli elementi finiti.

Data la novità dell'argomento trattato, il presente lavoro è da intendersi come base di partenza per lo studio del controllo attivo dei materiali in composito. Esso rappresenta comunque un passo in avanti rispetto alle trattazioni, tra l'altro ancora rare nel caso del controllo distribuito (tra le quali

la più interessante è la [2]) in quanto basata su un modello di spostamento molto potente, l'RZ, che permette la valutazione delle tensioni di taglio interlaminari in maniera più accurata rispetto agli altri modelli. Il semplice esempio riportato fornisce risultati analitici confortanti che lasciano intravedere la possibilità di ottenere risultati ancora più accurati sfruttando le reali potenzialità offerte dal modello. Per mezzo del metodo degli elementi finiti si potrebbero ottenere i primi risultati relativi a strutture bidimensionali soggette a controllo distribuito, poiché, in letteratura, sono finora disponibili risultati sperimentali e teorici relativi a strutture monodimensionali (travi).

Indice

Summary	I
1 Introduzione generale.	1
1.1 Generalità.	1
1.2 Letteratura esistente.	4
2 Geometria del guscio	6
2.1 Introduzione	6
2.2 Richiami di geometria differenziale	7
2.2.1 Curve nello spazio	7
2.2.2 Superfici nello spazio	11
2.3 Le coordinate del guscio.	28
3 Relazioni spostamenti-deformazioni	34
3.1 Introduzione	34
3.2 Espressioni generali degli allungamenti unitari e degli scorrimenti angolari	34
3.3 Relazioni spostamenti-deformazioni.	37
4 Equazioni di equilibrio dinamico del guscio multistrato	40
4.1 Introduzione	40
4.1.1 Il principio dei lavori virtuali.	40
4.1.2 Considerazioni relative ai vari modelli di spostamento.	42
4.2 Modello di spostamento utilizzato.	47

4.3	Relazioni tra spostamenti e componenti di deformazione. . . .	56
4.4	Equazioni di equilibrio del guscio multistrato.	59
4.4.1	Variazione virtuale dell'energia di deformazione elastica.	59
4.4.2	Lavoro virtuale delle forze esterne.	63
4.4.3	Lavoro virtuale delle forze d'inerzia.	64
4.4.4	Equazioni del moto e condizioni al contorno.	66
4.5	Risultanti di tensione.	68
4.6	Particolarizzazione delle equazioni.	78
5	La piezoelettricità.	79
5.1	Introduzione.	79
5.2	Effetto piezoelettrico diretto e inverso.	80
5.3	Spiegazione qualitativa del comportamento piezoelettrico. . . .	81
5.4	Relazioni matematiche della piezoelettricità.	83
5.4.1	La costante piezoelettrica del materiale.	83
5.4.2	Equazioni costitutive del piezoelettrico.	84
6	Modellizzazione del guscio multistrato con strati di piezoelettrico. . . .	87
6.1	Introduzione.	87
6.2	Equazioni costitutive dello strato di piezoelettrico.	88
6.3	Variazione virtuale dell'energia di deformazione elastica.	89
6.4	Equazioni di equilibrio e condizioni al contorno.	91
6.5	Risultanti di tensione di attuazione in termini di spostamenti.	93
6.5.1	Considerazioni.	93
6.5.2	Espressioni delle deformazioni indotte dall'attuazione. . . .	97
7	Il controllo.	107
7.1	Introduzione.	107
7.2	I sistemi di controllo.	107
7.3	La retroazione.	109

7.4	Rappresentazione dei sistemi.	110
7.5	Schemi a blocchi.	111
7.6	Schema a blocchi di un sistema di controllo retroazionato. . .	113
7.7	Schema a blocchi del guscio multistrato retroazionato.	115
7.7.1	Schema a blocchi del guscio multistrato.	115
7.7.2	Il guscio controllato in retroazione.	115
7.8	La funzione di trasferimento del sistema retroazionato.	118
7.9	Il guscio stratificato retroazionato in velocità.	119
7.10	Stabilità del sistema retroazionato.	120
7.10.1	Criterio di Routh.	121
8	La trave controllata in feedback di velocità.	123
8.1	Introduzione.	123
8.2	Descrizione della struttura.	124
8.3	Equazione del moto.	125
8.4	Moto della trave non attuata non smorzata.	127
8.5	Moto smorzato della trave non attuata.	129
8.6	Moto della trave retroazionata.	131
8.6.1	Commento ai risultati.	134
8.7	Osservazioni relative alla scelta della distribuzione di tensione $V(x)$.	135
A	Il vettore dei carichi nodali di attuazione nel metodo FEM.	142
A.1	Premessa.	142
A.2	Il vettore dei carichi nodali di attuazione.	142

Capitolo 1

Introduzione generale.

1.1 Generalità.

In svariati settori dell'ingegneria, da quello civile a quello aeronautico e spaziale, il problema del controllo della rigidità, delle deformazioni, e delle vibrazioni strutturali, ha assunto in questi ultimi anni un aspetto sempre più rilevante nell'ambito del relativo progetto strutturale.

Soprattutto nelle strutture spaziali, che sono caratterizzate da bassi valori dello smorzamento strutturale ed 'ambientale', le alte velocità con cui vengono compiute certe manovre, possono portare alla nascita di vibrazioni incontrollate di ampiezza notevole che possono risultare distruttive. Inoltre la vibrazione prolungata nel tempo può indurre nel materiale costituente la struttura una 'fatica' eccessiva che può ridurre in maniera non desiderata la vita rimanente. Risulta quindi conveniente smorzare tempestivamente le vibrazioni che si instaurano dopo ogni manovra onde stabilizzare il sistema. Un metodo per risolvere il problema potrebbe consistere nell'irrigidire le strutture in modo opportuno, ma questo porterebbe al dimensionamento di elementi aventi resistenza e peso eccessivi rispetto a quelle richieste dal carico pagante previsto. Si vede quindi la necessità di introdurre dei sistemi

che permettano il controllo delle vibrazioni senza determinare un aumento del peso del complesso strutturale.

Al fine di controllare il livello vibrazionale delle strutture sono stati fino ad oggi impiegati metodi di *controllo passivo* comprendenti, ad esempio, materiali smorzanti, smorzatori dinamici, materiali fonoassorbenti per il controllo del rumore ecc.

Attualmente, la disponibilità di efficaci, sicuri ed economici sistemi di rilevamento della risposta, di attuazione e di elaborazione dei segnali, i notevoli progressi nella controllistica, hanno spostato l'interesse dei progettisti dai sistemi di controllo passivo ai più nuovi e promettenti sistemi di *controllo attivo*.

Per controllo attivo delle strutture si intende la possibilità di controllare e modulare il comportamento di queste ultime, sia statico che dinamico tramite un sistema integrato di sensori ed attuatori distribuiti sulla struttura e collegati da una opportuna rete di elaborazione. Questo tipo di approccio, sviluppato inizialmente per il controllo di strutture spaziali di grandi dimensioni tramite pochi attuatori elettrodinamici, richiede una grande conoscenza del comportamento strutturale in campo dinamico. Le difficoltà incontrate dai progettisti nel predire analiticamente le prestazioni effettive, così come le sostanziali differenze rilevate fra i test pre-lancio ed il comportamento in orbita hanno suggerito un approccio diverso: l'utilizzo cioè di un gran numero di micro attuatori e sensori integrati o anche di estesi film piezo che permettono il controllo distribuito se posizionati all'interno della struttura e finalizzati all'ottenimento di particolari prestazioni statiche (controllo della deformata, per esempio) e/o dinamiche (controllo delle vibrazioni). Il maggior vantaggio del controllo attivo è che con esso si possono ottenere reali capacità adattative, ovvero si può modulare realmente la dinamica strutturale identificando in esercizio le condizioni in qualche modo distruttive ed allontanarsi da esse.

Le possibilità concrete di ottenere risultati insperati con le usuali tecniche di controllo passivo sono il motivo che spinge il notevole interesse di molti ricercatori in questo nuovo campo il cui sviluppo è soprattutto dovuto ai notevoli progressi ottenuti nella caratterizzazione e nello studio di materiali particolarmente adatti allo scopo: in primo luogo i *materiali piezoelettrici*, che come noto, godono della proprietà di deformarsi se sottoposti ad un campo elettrico e soddisfano inoltre requisiti di leggerezza; in secondo luogo i materiali dotati di memoria, i cosiddetti *Shape Memory Alloy*, che oltre ad interessanti proprietà meccaniche, esercitano forze di recupero se riscaldati. Questi nel presente lavoro non saranno presi in considerazione.

Lo sviluppo della teoria che viene svolto nella presente tesi, essendo soprattutto indirizzato verso lo studio di un modello di controllo distribuito della struttura, non può fare a meno di non considerare le caratteristiche di lavorabilità e flessibilità cui deve soddisfare il materiale costituente lo strato attuatore in piezoelettrico. Il materiale che si è rivelato ottimo allo scopo di attuare il controllo distribuito, e che è stato oggetto da parte di molti ricercatori di un buon numero di studi a tale fine, è il PVDF: un polimero dalle caratteristiche piezoelettriche avente buona resistenza e una flessibilità tale da poter essere prodotto in sottili fogli dalla geometria anche molto complessa, al contrario dei piezoelettrici ceramici molto duri, fragili e difficili da lavorare.

I motivi che hanno portato alla scelta dello studio, nel presente lavoro, del controllo distribuito, discendono da alcune semplici considerazioni:

- Dato che le strutture sono corpi continui e quindi dotate di infiniti gradi di libertà, i sistemi di controllo costituiti di un certo numero di attuatori posti in punti opportunamente scelti della struttura, permettono il controllo di un numero comunque ristretto di modi di vibrare. La scelta dei modi da controllare, insieme a quella dei punti in cui posizionare gli attuatori risulta molto difficoltosa in quanto, come già

detto, il comportamento strutturale in servizio può variare in modo significativo rispetto al comportamento previsto nei test di laboratorio. Questo può essere quindi la causa della nascita di dannosi fenomeni di ‘spillover’. Questi possono innescarsi a causa della presenza di modi non previsti in progetto, e quindi non controllati, nell’intervallo di frequenze in cui agisce il controllo e possono destabilizzare il sistema con gravi danni. Un rimedio a tale fenomeno è il PPF (positive position feedback) descritto in [16].

- Di recente è stato sviluppato un metodo per ottenere uno smorzamento distribuito che aggira i problemi derivanti dal troncamento modale presso il MIT da Bailey, che fa uso di film di materiale piezoelettrico, il PVDF. Con questa procedura si sono ottenuti sperimentalmente degli incrementi del fattore di perdita fino al 40%.
- Da queste osservazioni si intuisce la possibilità teorica di operare sullo smorzamento di tutti i modi di vibrare, e quindi di operare uno sforzo diretto nel senso di sviluppare ulteriormente quelle modellizzazioni che permettono lo studio del comportamento delle strutture accoppiate con un tale tipo di controllo al fine di renderle più accurate.

1.2 Letteratura esistente.

Per ciò che riguarda l’impiego dei materiali piezoelettrici come attuatori o sensori, è disponibile una notevole bibliografia, a partire dal lavoro di Crawley e de Luis[6] fino a quelli sviluppati presso il CIRA alcuni dei quali sono riportati in [8], [9], [10], che suffragano gli studi dei due autori citati e riguardanti simulazioni numeriche e sperimentali del comportamento di strutture controllate in modo attivo. Fondamentale però è stato nello svolgimento del presente lavoro l’articolo di Tzou e Gadre[2] relativo all’impiego del controllo

attivo distribuito, facente uso di film estesi di materiale piezoelettrico disposti all'interno della stratificazione di un guscio composito. Per quanto riguarda gli studi sugli algoritmi di controllo, si passa dai semplici modelli in feedback a guadagno costante descritti in [11] a modelli con guadagno variabile trattati in [12]. In [16] viene descritta la tecnica del PPF cui si è accennato nel paragrafo precedente, mentre in [15] Burke ed Hubbard affrontano il problema della scelta della distribuzione spaziale di tensione con cui attuare il film di piezoelettrico, in funzione delle condizioni al contorno e della possibilità materiale di realizzare la suddetta distribuzione.

Capitolo 2

Geometria del guscio

2.1 Introduzione

Un guscio sottile è un corpo limitato da due superfici curve molto ravvicinate, così che possa essere considerato come la materializzazione di una superficie curva, come nel caso della trave e della piastra piana, considerate materializzazioni di una linea e di una superficie piana.

Sono tre le caratteristiche fondamentali che identificano un guscio: la superficie di riferimento, il suo spessore e il suo contorno. Di queste, la più importante è la superficie di riferimento: essa definisce la forma del guscio e dal suo comportamento meccanico può essere dedotto quello del guscio stesso.

In genere, se il guscio è costituito di un unico materiale omogeneo, si sceglie come superficie di riferimento la superficie media, cioè il luogo dei punti che sono equidistanti dalle superfici inferiore e superiore. Se invece il guscio è stratificato o costituito di materiale non omogeneo, è più conveniente adottare come riferimento o una delle superfici superiore o inferiore, o la superficie neutra, cioè l'analogo dell'asse neutro delle travi.

Una volta scelta la superficie di riferimento, relativamente ad un suo punto

generico, lo spessore del guscio è rappresentato dalla distanza tra le superfici inferiore e superiore misurata lungo la normale alla superficie di riferimento stessa nel punto considerato.

Il bordo del guscio può essere definito in un sistema di coordinate fissato sulla superficie di riferimento e la sua superficie avente la normale ortogonale alla normale della superficie di riferimento. Nel caso in cui il guscio non possieda il bordo allora esso si dirà chiuso o completo.

Prima di affrontare lo studio dei gusci sottili elastici, sarà utile rivedere alcuni risultati della geometria differenziale delle superfici.

2.2 Richiami di geometria differenziale

2.2.1 Curve nello spazio

Verranno di seguito riportati alcuni risultati della teoria delle curve nello spazio, che verranno utilizzati per la comprensione della teoria delle superfici nello spazio. In quest'ultima si farà uso delle proprietà delle curve, viste come appartenenti ad una superficie.

Rappresentazione parametrica di una curva

Una curva nello spazio può essere rappresentata, in un sistema di coordinate (x, y, z) di origine O , come il luogo dei punti individuati dell'estremo del vettore $(Q - O)$:

$$\vec{Q} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

La rappresentazione può avvenire in forma parametrica, cioè in funzione di un unico parametro t che può variare all'interno di un certo intervallo $t_1 \leq t \leq t_2$.

Se le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sono iniettive, allora a differenti valori assunti dal parametro t corrispondono differenti punti Q della curva \mathcal{C} .

Indicando con s l'ascissa curvilinea fissata sulla curva \mathcal{C} ed effettuando la derivazione della funzione vettoriale \vec{r} rispetto ad s , si ottiene:

$$\vec{\tau} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k} \quad (2.1)$$

in cui $\vec{\tau}$ è il versore tangente alla curva nel punto generico. Il fatto che $\vec{\tau}$ sia un versore lo si può vedere sviluppando:

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

poiché è $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

La retta tangente

Al versore tangente $\vec{\tau}$ alla curva \mathcal{C} in un punto Q , corrisponde una retta d'azione la quale è anch'essa tangente alla curva in quel punto. Dato che questa può essere intesa come la posizione limite di una retta secante passante per Q e per un altro punto $Q_1(t_1)$ distinto allorchè $t_1 \rightarrow t$, allora la *retta tangente* può essere interpretata come quella che passa per due punti consecutivi della curva di cui uno è proprio Q .

Il piano osculatore

Considerando un piano secante che contenga la retta tangente a \mathcal{C} nel punto Q , ed un punto $Q_2(t_2)$ distinto da Q e da Q_1 si può immaginare che questo ammetta una posizione limite allorchè $Q_2 \rightarrow Q$. Tale posizione limite prende il nome di *piano osculatore* alla curva \mathcal{C} nel punto Q ed è quello che contiene tre punti consecutivi della curva dei quali uno è il punto Q .

Il piano osculatore contiene dunque i vettori $\vec{Q}' \parallel \vec{\tau}$ e $\vec{Q}'' \parallel \vec{n}$ dove quest'ultimo è il versore normale alla curva \mathcal{C} nel punto Q . Indicando con \vec{P} il generico punto appartenente al piano secante, il vettore $(\vec{P} - \vec{Q})$ giacerà nel piano stesso insieme al vettore tangente \vec{Q}' ed al vettore $\vec{Q}_2 - \vec{Q}$. Da quanto ora osservato si deduce quindi che l'equazione del piano secante risulta essere:

$$(\vec{P} - \vec{Q}) [\vec{Q}' \wedge (\vec{Q}_2 - \vec{Q})] = 0 \quad (2.2)$$

L'equazione del piano osculatore può essere ottenuta dalla 2.2 facendo tendere $t_2 \rightarrow t$. Sviluppando in serie di Taylor l'espressione vettoriale della curva \mathcal{C} in un intorno di t :

$$\vec{Q}(t_2) = \vec{Q}(t) + \vec{Q}'(t)(t_2 - t) + \vec{Q}''(t) \frac{(t_2 - t)^2}{2!} + \frac{(t_2 - t)^3}{3!} \vec{\varepsilon}$$

con $\varepsilon = o(t_2 - t)$. Facendo tendere $t_2 \rightarrow t$, $\vec{\varepsilon} \rightarrow \vec{0}$ e il vettore:

$$[\vec{Q}(t_2) - \vec{Q}(t)]$$

tende a cadere nel piano individuato da \vec{Q}' e \vec{Q}'' , per cui la 2.2 diventa:

$$(\vec{P} - \vec{Q}) [\vec{Q}' \wedge \vec{Q}'] = 0 \quad (2.3)$$

che è l'equazione del piano osculatore.

Dalla 2.3 si deduce quindi che il piano osculatore di una curva \mathcal{C} in un suo punto generico, è quello individuato dal vettore tangente \vec{Q}' e dal suo derivato \vec{Q}'' .

La normale principale

Si definisce *normale principale* alla curva \mathcal{C} in un suo punto Q , il versore normale a quello tangente e che giace nel piano osculatore.

Se si adotta la parametrizzazione intrinseca della curva $t = t(s)$ le espressioni di \vec{n} e di $\vec{\tau}$ sono:

$$\vec{n} = \frac{d^2 \vec{Q}}{ds^2} \frac{1}{|\vec{Q}''|} \quad (2.4)$$

$$\vec{\tau} = \vec{Q}'(s) \quad (2.5)$$

La curvatura

L'espressione del versore \vec{n} può essere ottenuta in funzione del versore $\vec{\tau}$, effettuando la doppia derivazione di \vec{Q} rispetto alla ascissa curvilinea s :

$$\vec{Q} = \vec{Q}(t(s))$$

$$\frac{d\vec{Q}}{ds} = \dot{\vec{Q}} t' = \vec{\tau}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{\tau}' = \ddot{\vec{Q}} t'^2 + t'' \dot{\vec{Q}} = \vec{K}$$

si vede quindi che \vec{K} giace nel piano osculatore ed essendo inoltre $\vec{K} \perp \vec{\tau}$ allora $\vec{n} \parallel \vec{K}$. Si può quindi esprimere il vettore \vec{K} come:

$$\vec{K} = k\vec{n} \tag{2.6}$$

Il vettore \vec{K} è il *vettore curvatura* ed il fattore moltiplicativo k rappresenta la *curvatura* di \mathcal{C} :

$$k = |\vec{K}| = |\vec{\tau}'| = |\vec{Q}''| \tag{2.7}$$

La curvatura k esprime la velocità con cui varia il vettore tangente allorchè un punto si muove sulla curva. Il reciproco della curvatura è il *raggio di curvatura* di \mathcal{C} nel punto considerato, cioè il raggio del *cerchio osculatore* in quel punto.

Il cerchio osculatore

Il cerchio osculatore è un cerchio giacente nel piano osculatore e passante per tre punti consecutivi di \mathcal{C} di cui uno è quello considerato. Il raggio del cerchio osculatore è il reciproco della curvatura k :

$$R = \frac{1}{k}$$

Il verso di \vec{n} è quello che punta il centro del cerchio osculatore alla curva nel punto considerato. L'espressione di R è:

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}} \quad (2.8)$$

essendo:

$$|\vec{Q}''| = \sqrt{\vec{Q}'' \cdot \vec{Q}''}$$

con:

$$\vec{Q}'' = x''(s)\vec{i} + y''(s)\vec{j} + z''(s)\vec{k}$$

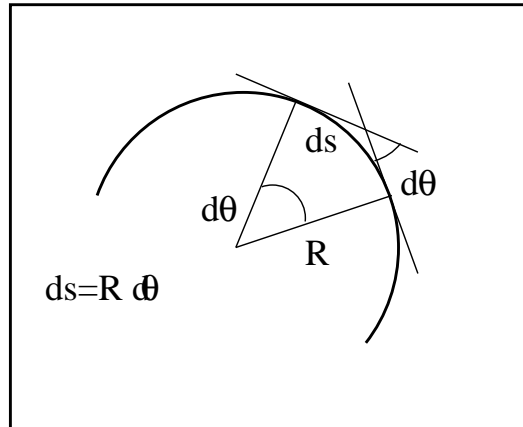


Figura 2.1. Il cerchio osculatore

2.2.2 Superfici nello spazio

Fissato un sistema di riferimento (x,y,z) ortogonale cartesiano, una superficie Σ nello spazio può essere vista come il luogo dei punti posizione dell'estremo del vettore $(Q - O)$ in cui O è l'origine del sistema di riferimento stesso:

$$\vec{Q} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

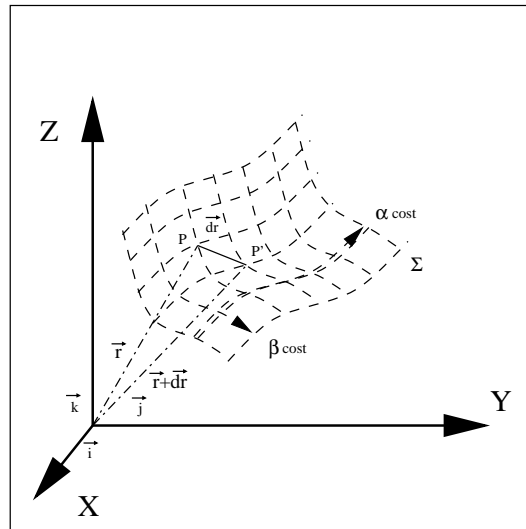


Figura 2.2. Superficie nello spazio

Rappresentazione parametrica di una superficie

Una superficie Σ nello spazio può essere espressa in forma parametrica mediante l'introduzione dei due parametri indipendenti α e β tali che:

$$\vec{Q} = \begin{cases} x = x(\alpha, \beta) \\ y = y(\alpha, \beta) \\ z = z(\alpha, \beta) \end{cases}$$

dove x, y, z sono funzioni continue ed iniettive di α e β al variare delle quali il vettore \vec{Q} descrive Σ .

I parametri possono essere scelti come coordinate curvilinee sulla superficie Σ . Tenendo alternativamente fisso uno dei due e facendo variare l'altro, si ottengono due famiglie di curve chiamate *curve parametriche della superficie*.

Prima forma fondamentale

Se con Q si indica il generico punto di Σ e con Q' un altro punto appartenente all'intorno del primo, la variazione $d\vec{Q}$ del vettore \vec{Q} può essere scritta:

$$d\vec{Q} = \vec{Q}_{,\alpha}d\alpha + \vec{Q}_{,\beta}d\beta \quad (2.9)$$

in cui le derivazioni rispetto alla generica variabile sono state indicate mediante pedice della funzione derivata.

Il quadrato del modulo del vettore $d\vec{Q}$ vale:

$$(dS)^2 = d\vec{Q} \cdot d\vec{Q} = E(d\alpha)^2 + 2Fd\alpha d\beta + G(d\beta)^2 = IFF \quad (2.10)$$

in cui:

- $E = \vec{Q}_{,\alpha} \cdot \vec{Q}_{,\alpha}$
- $2F = \vec{Q}_{,\alpha} \cdot \vec{Q}_{,\beta}$
- $G = \vec{Q}_{,\beta} \cdot \vec{Q}_{,\beta}$

La 2.10 rappresenta la *prima forma fondamentale* della superficie Σ definita dai coefficienti E , F , G .

Muovendosi lungo le curve parametriche le espressioni di dS risultano essere:

- $dS_\alpha = \sqrt{E}d\alpha$ lungo la linea $\beta = cost$
- $dS_\beta = \sqrt{G}d\beta$ lungo la linea $\alpha = cost$

Notando che $\vec{Q}_{,\alpha}$ e $\vec{Q}_{,\beta}$ sono vettori tangenti alle curve $\beta = cost$ e $\alpha = cost$, allora il coefficiente F è nullo se le curve parametriche formano una griglia ortogonale. Con una tale scelta la prima forma fondamentale diventa:

$$(dS)^2 = A^2(d\alpha)^2 + B^2(d\beta)^2 \quad (2.11)$$

in cui si è posto:

- $A = \sqrt{E}$
- $B = \sqrt{G}$

Il versore normale

In ogni punto della superficie esiste un *versore normale* $\vec{n}(\alpha, \beta)$ che è ortogonale ai vettori $\vec{Q}_{,\alpha}$ e $\vec{Q}_{,\beta}$ e quindi al piano tangente che questi ultimi definiscono:

$$\vec{n} = \frac{\vec{Q}_{,\alpha} \wedge \vec{Q}_{,\beta}}{|\vec{Q}_{,\alpha} \wedge \vec{Q}_{,\beta}|} \quad (2.12)$$

Si può allora definire, nel generico punto di Σ , una terna di versori che definiscono un sistema di riferimento in coordinate curvilinee:

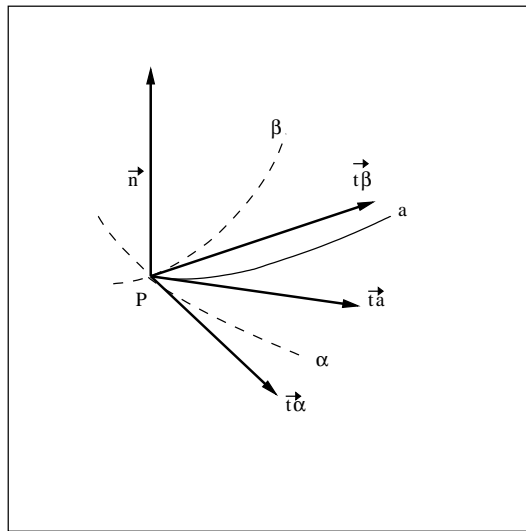


Figura 2.3. Versori del riferimento curvilineo

$$\vec{t}_\alpha = \frac{\vec{Q}_{,\alpha}}{A} \quad (2.13)$$

$$\vec{t}_\beta = \frac{\vec{Q}_{,\beta}}{B} \quad (2.14)$$

$$\vec{n} = \vec{t}_\alpha \wedge \vec{t}_\beta \quad (2.15)$$

con:

- $A = | \vec{Q}_{,\alpha} |$
- $B = | \vec{Q}_{,\beta} |$

È da notare che la normale alla superficie così individuata non coincide necessariamente con la normale principale definita in 2.2.1.

Il verso positivo di \vec{n} è scelto in modo che esso attraversi prima la parte convessa e poi quella concava di Σ .

Seconda forma fondamentale

In precedenza si è indicato con \vec{K} il vettore curvatura di una curva \mathcal{C} nello spazio in un suo generico punto. Considerando ora la curva come appartenente alla superficie Σ , \vec{K} , che è parallelo alla normale principale di \mathcal{C} , non sarà in generale parallelo al versore \vec{n} normale alla superficie. In particolare \vec{K} potrà essere decomposto secondo due componenti, una diretta secondo \vec{n} ed una giacente sul piano tangente:

$$\vec{K} = \vec{\tau}_{,s} = \vec{K}_n + \vec{K}_t \quad (2.16)$$

con:

- \vec{K}_n *vettore curvatura normale*
- \vec{K}_t *vettore curvatura tangenziale*

Dato che $\vec{K}_n \parallel \vec{n}$, si può scrivere:

$$\vec{K}_n = K_n \cdot \vec{n}$$

in cui K_n è la curvatura normale. Dal momento che \vec{n} è perpendicolare a $\vec{\tau}$, derivando il prodotto scalare $\vec{n} \cdot \vec{\tau}$ rispetto ad s si ottiene:

$$\vec{n} \frac{d\vec{\tau}}{ds} = -\vec{\tau} \frac{d\vec{n}}{ds} \quad (2.17)$$

Ricordando che:

$$K_n = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{n}$$

e la 2.17, si ottiene:

$$K_n = -\frac{d\vec{Q} \cdot d\vec{n}}{ds^2}$$

in cui:

- $d\vec{n} = \vec{n}_{,\alpha} d\alpha + \vec{n}_{,\beta} d\beta$
- $d\vec{Q} = \vec{Q}_{,\alpha} d\alpha + \vec{Q}_{,\beta} d\beta$
- $ds^2 = d\vec{Q} \cdot d\vec{Q}$

l'espressione di K_n risulta quindi essere:

$$K_n = \frac{L(d\alpha)^2 + 2Md\alpha d\beta + N(d\beta)^2}{E(d\alpha)^2 + 2Fd\alpha d\beta + G(d\beta)^2} \quad (2.18)$$

con:

$$L = -\vec{n}_{,\alpha} \cdot \vec{Q}_{,\alpha} \quad (2.19)$$

$$2M = -\vec{n}_{,\alpha} \cdot \vec{Q}_{,\beta} - \vec{n}_{,\beta} \cdot \vec{Q}_{,\alpha} \quad (2.20)$$

$$N = -\vec{n}_{,\beta} \cdot \vec{Q}_{,\beta} \quad (2.21)$$

Il numeratore di K_n rappresenta la *seconda forma fondamentale* di Σ :

$$IIF = L(d\alpha)^2 + 2Md\alpha d\beta + N(d\beta)^2 \quad (2.22)$$

per cui la curvatura normale risulta essere data dal rapporto tra la seconda e la prima forma fondamentale:

$$K_n = \frac{IIF F}{IFF}$$

Le espressioni di L , M , ed N possono essere ottenute in termini del versore \vec{n} non derivato, ricordando che $\vec{Q}_{,\alpha}$ e $\vec{Q}_{,\beta}$ sono ortogonali allo stesso \vec{n} ed assumendo:

$$\vec{Q}_{,\alpha,\beta} = \vec{Q}_{,\beta,\alpha}$$

Differenziando le espressioni di:

$$\vec{Q}_{,\alpha} \cdot \vec{n} = 0$$

e di:

$$\vec{Q}_{,\beta} \cdot \vec{n} = 0$$

si ottiene:

$$L = \vec{Q}_{,\alpha,\alpha} \cdot \vec{n} \quad (2.23)$$

$$M = \vec{Q}_{,\alpha,\beta} \cdot \vec{n} \quad (2.24)$$

$$N = \vec{Q}_{,\beta,\beta} \cdot \vec{n} \quad (2.25)$$

I coefficienti E , F , G , L , M , N dipendono quindi dalle coordinate del punto preso in considerazione su Σ , cioè da α , e da β . Dalla 2.18 si vede allora che la curvatura normale K_n dipende, una volta scelto il punto Q da prendere in considerazione su Σ , solo dal valore assunto da $\frac{d\alpha}{d\beta}$. Quest'ultima è la pendenza in coordinate (α, β) della generica curva \mathcal{C} , giacente su Σ passante per Q , valutata in Q . Si conclude quindi che la curvatura normale K_n valutata in un generico punto di una superficie dipende, oltre che dal punto considerato, anche dall'orientamento della direzione nella quale viene valutata.

Svergolamento

In corrispondenza di un punto Q appartenente ad una curva \mathcal{C} giacente su di una superficie Σ , siano individuati i versori normale \vec{n} , \vec{t} tangente a \mathcal{C} , e \vec{p} ortogonale ai primi due, per cui appartenente al piano tangente.

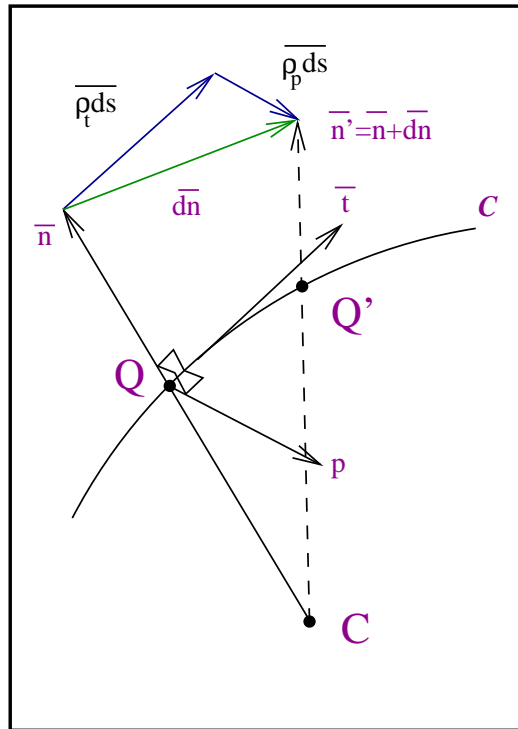


Figura 2.4. Lo svergolamento di una curva nello spazio.

Sia Q' un punto di \mathcal{C} in un intorno di Q e \vec{n}' il versore normale alla superficie in quel punto. Per quanto ora supposto sarà:

$$\vec{n}' = \vec{n} + d\vec{n}$$

Se ora si introducono le due grandezze:

$$\rho_t = \vec{t} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} \tag{2.26}$$

$$\rho_p = \vec{p} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} \quad (2.27)$$

si vede che:

- ρ_t misura la convergenza della direzione di \vec{n} e di \vec{n}' sul piano individuato dai punti Q , Q' e C
- ρ_p misura lo *svergolamento* di Σ nella direzione di \vec{t}
- C è il centro di curvatura di Σ in Q relativo alla direzione di \vec{t} .

Curvature principali

È interessante a questo punto cercare quelle direzioni:

$$\lambda = \frac{d\beta}{d\alpha} \quad (2.28)$$

per le quali la curvatura normale K_n ha i suoi valori estremi massimo e minimo, cioè è stazionaria.

L'espressione di K_n in termini di λ è:

$$K_n(\lambda) = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} \quad (2.29)$$

La curvatura ha un valore estremo per quelle direzioni λ che soddisfano la:

$$\frac{dK_n}{d\lambda} = 0 \quad (2.30)$$

cioè

$$(2M + 2N\lambda)(E + 2F\lambda + G\lambda^2) - (2F + 2G\lambda)(L + 2M\lambda + N\lambda^2) = 0 \quad (2.31)$$

Si può subito trovare un primo valore:

$$K_{1n} = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} \quad (2.32)$$

mentre l'altro può essere ottenuto osservando che:

$$\begin{aligned} (E + 2F\lambda + G\lambda^2) &= (E + F\lambda) + \lambda(F + G\lambda) \\ (L + 2M\lambda + N\lambda^2) &= (L + M\lambda) + \lambda(M + N\lambda) \end{aligned}$$

Sostituendo queste due ultime espressioni nella 2.29 e nella 2.31, e sviluppando opportunamente le espressioni trovate, si ottiene:

$$K_{2n} = \frac{L + M\lambda}{E + F\lambda} \quad (2.33)$$

I valori di K_{1n} e K_{2n} così trovati sono le *curvature principali* e rappresentano i valori estremi assunti dalla curvatura della superficie Σ in un suo generico punto Q . Tali valori si realizzano secondo due direzioni λ_1 e λ_2 , dette *direzioni principali*, passanti per Q e che soddisfano la relazione:

$$(MG - NF)\lambda^2 + (LG - NE)\lambda + (LF - NE) = 0 \quad (2.34)$$

ottenuta sviluppando la 2.31.

La 2.34 fornisce due valori di λ che definiscono due direzioni ortogonali:

$$\lambda_1 \perp \lambda_2$$

Quanto ora affermato può essere dimostrato osservando che:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{(LG - NE)}{(MG - NF)} \quad (2.35)$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\frac{(LF - ME)}{(MG - NF)} \quad (2.36)$$

e sostituendo queste relazioni nella condizione di ortogonalità tra λ_1 e λ_2 .

Indicando con θ l'angolo formato tra λ_1 e λ_2 ed esprimendo la variazione $d\vec{Q}$ lungo ciascuna di queste due direzioni si ottiene:

$$(d\vec{Q})_1 = \vec{Q}_{,\alpha}(d\alpha)_1 + \vec{Q}_{,\beta}(d\beta)_1 \quad (2.37)$$

$$(d\vec{Q})_2 = \vec{Q}_{,\alpha}(d\alpha)_2 + \vec{Q}_{,\beta}(d\beta)_2 \quad (2.38)$$

$$\cos(\theta) = \frac{(d\vec{Q})_1 \cdot (d\vec{Q})_2}{|(d\vec{Q})_1| \cdot |(d\vec{Q})_2|} \quad (2.39)$$

Sostituendo la 2.37 e la 2.38 nella 2.39, si ottiene:

$$\cos(\theta) \frac{|(d\vec{Q})_1| \cdot |(d\vec{Q})_2|}{d\alpha_1 d\alpha_2} = E + F(\lambda_1 + \lambda_2) + G(\lambda_1 \lambda_2) \quad (2.40)$$

e ricordando la 2.35 e la 2.36 si vede subito, sostituendole nella 2.40, che si ottiene:

$$\cos(\theta) = 0$$

cioè:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Tutte le direzioni λ_1 e λ_2 così calcolate in tutti i punti della superficie danno origine ad una griglia ortogonale di curve dette *linee di curvatura*. Queste possono essere considerate come linee parametriche della superficie, nel qual caso si ottiene:

$$(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \infty)$$

e dovranno quindi essere:

$$LF - ME = 0$$

$$MG - NF = 0$$

Ricordando poi che le linee di curvatura sono ortogonali, dovrà essere $F = 0$ e:

$$ME = 0$$

$$MG = 0$$

Da queste si deduce che, non potendo essere nulle G ed E allora sarà necessariamente:

$$M = 0$$

I valori massimo e minimo della curvatura saranno quindi:

$$K_\alpha = \frac{L}{E} \quad \text{per } \lambda = 0 \tag{2.41}$$

$$K_\beta = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L + N\lambda^2}{E + G\lambda^2} = \frac{N}{G} \tag{2.42}$$

In definitiva:

$$K_\alpha = \frac{1}{R_\alpha} = \frac{L}{E} \tag{2.43}$$

$$K_\beta = \frac{1}{R_\beta} = \frac{N}{G} \tag{2.44}$$

A seconda del segno assunto da K^* definito come:

$$K^* = K_\alpha K_\beta$$

possono essere fatte alcune interessanti osservazioni:

- $K^* = 0$ Σ è sviluppabile, nel senso che può essere ricavata da una superficie piana piegandola senza stirarla come per i coni ed i cilindri

- $K^* > 0$ La curvatura di una linea \mathcal{C} generica, data dall'intersezione di Σ con un piano contenente \vec{n} , è tale che il centro di curvatura rimanga sempre dalla stessa parte rispetto a Σ , quando il piano ruota intorno alla direzione di \vec{n}
- $K^* < 0$ La curvatura di una linea \mathcal{C} generica, data dall'intersezione di Σ con un piano contenente \vec{n} , è tale che il centro di curvatura passi da una parte all'altra della superficie Σ , quando il piano ruota intorno alla direzione di \vec{n}

Lo sviluppo della teoria dei gusci è alquanto semplificato se si scelgono le linee di curvatura come linee parametriche.

Si assume d'ora in avanti il riferimento costituito dalle linee di curvatura lungo le quali lo svergolamento ρ_p della superficie risulta nullo.

Derivazione dei versori fondamentali

La terna costituita dai tre versori $\vec{t}_\alpha, \vec{t}_\beta, \vec{n}$ tra di essi mutuamente ortogonali, varia il suo orientamento al variare del punto di Σ in corrispondenza del quale viene valutata. Alla luce di tale osservazione, risulta utile procurarsi le espressioni assunte dalle derivate di tali versori, eseguite rispetto a α e β .

$$\begin{aligned}\vec{t}_\alpha &= \frac{\vec{Q}_{,\alpha}}{A} \\ \vec{t}_\beta &= \frac{\vec{Q}_{,\beta}}{B} \\ \vec{n} &= \vec{t}_\alpha \wedge \vec{t}_\beta\end{aligned}\tag{2.45}$$

Dato che le derivate $\vec{n}_{,\alpha}$ e $\vec{n}_{,\beta}$ sono vettori ortogonali a \vec{n} , allora essi giacciono nel piano formato da \vec{t}_α e \vec{t}_β per cui:

$$\vec{n}_{,\alpha} = a\vec{t}_\alpha + b\vec{t}_\beta$$

con a e b componenti di $\vec{n}_{,\alpha}$ lungo le direzioni α e β , che possono essere così determinate:

$$a = \vec{t}_\alpha \cdot \vec{n}_{,\alpha} = \frac{\vec{Q}_{,\alpha} \cdot \vec{n}_{,\alpha}}{A} = -\frac{L}{A} \quad (2.46)$$

$$b = \vec{t}_\beta \cdot \vec{n}_{,\alpha} = \frac{\vec{Q}_{,\beta} \cdot \vec{n}_{,\alpha}}{B} = -\frac{M}{B} = 0 \quad (2.47)$$

ricordando la 2.19 e la 2.20 e che $M = 0$ avendo scelto come riferimento le linee principali di curvatura. L'espressione di $\vec{n}_{,\alpha}$ diventa allora:

$$\vec{n}_{,\alpha} = a \vec{t}_\alpha = -\frac{L}{A} \vec{t}_\alpha \quad (2.48)$$

Sostituendo in questa la 2.41 e la $E = A^2$, si ottiene:

$$\vec{n}_{,\alpha} = -\frac{A}{R_\alpha} \vec{t}_\alpha \quad (2.49)$$

e in modo analogo:

$$\vec{n}_{,\beta} = -\frac{B}{R_\beta} \vec{t}_\beta \quad (2.50)$$

Se si effettua ora la derivazione dei versori tangenti, si osserva che:

$$(A\vec{t}_\alpha)_{,\beta} = (B\vec{t}_\beta)_{,\alpha}$$

essendo:

$$\vec{Q}_{,\alpha,\beta} = \vec{Q}_{,\beta,\alpha}$$

Si vede allora che:

$$\vec{t}_{\beta,\alpha} = \frac{1}{B}(A\vec{t}_{\alpha,\beta} + A_{,\beta}\vec{t}_\alpha - B_{,\alpha}\vec{t}_\beta) \quad (2.51)$$

Per quanto riguarda il calcolo di $\vec{t}_{\alpha,\alpha}$, questo giacerà nel piano formato da \vec{t}_β e \vec{n} , perché normale a \vec{t}_α :

$$\vec{t}_{\alpha,\alpha} = c\vec{n} + d\vec{t}_\beta$$

con:

$$\vec{n} \cdot \vec{t}_{\alpha,\alpha} = c$$

$$\vec{t}_\beta \cdot \vec{t}_{\alpha,\alpha} = d$$

Essendo inoltre $\vec{t}_\alpha \perp \vec{n}$ risulta:

$$(\vec{t}_\alpha \cdot \vec{n})_{,\alpha} = \vec{n} \cdot \vec{t}_{\alpha,\alpha} + \vec{t}_\alpha \cdot \vec{n}_{,\alpha} = 0$$

per cui sfruttando la 2.49:

$$c = -\vec{t}_\alpha \cdot \vec{n}_{,\alpha} = \frac{A}{R_\alpha}$$

In modo analogo si ottiene d :

$$(\vec{t}_\beta \cdot \vec{t}_\alpha)_{,\alpha} = \vec{t}_{\beta,\alpha} \cdot \vec{t}_\alpha + \vec{t}_\beta \cdot \vec{t}_{\alpha,\alpha} = 0$$

$$d = -\vec{t}_{\beta,\alpha} \cdot \vec{t}_\alpha = -\frac{1}{B}(A\vec{t}_{\alpha,\beta} + A_{,\beta}\vec{t}_\alpha - B_{,\alpha}\vec{t}_\beta) \cdot \vec{t}_\alpha$$

ottenuta considerando la 2.54, e in fine:

$$d = -\frac{A_{,\beta}}{B}$$

perché è $(\vec{t}_\alpha \perp \vec{t}_{\alpha,\beta})$ ¹ e $(\vec{t}_\alpha \perp \vec{t}_\beta)$.

Finalmente si ottiene:

$$\vec{t}_{\alpha,\alpha} = \frac{A}{R_\alpha}\vec{n} - \frac{A_{,\beta}}{B}\vec{t}_\beta \tag{2.52}$$

¹Essendo $|\vec{t}_\alpha| = 1$ allora $(\vec{t}_\alpha \cdot \vec{t}_\alpha)_{,\beta} = 0$

Procedendo nello stesso modo possono essere ottenute le altre espressioni mancanti, cioè:

$$\vec{t}_{\alpha,\beta} = \frac{B_{,\alpha}}{A} \vec{t}_\beta \quad (2.53)$$

$$\vec{t}_{\beta,\alpha} = \frac{A_{,\beta}}{B} \vec{t}_\alpha \quad (2.54)$$

$$\vec{t}_{\beta,\beta} = \frac{B}{R_\beta} \vec{n} - \frac{B_{,\alpha}}{A} \vec{t}_\alpha \quad (2.55)$$

Le relazioni così ottenute possono essere scritte in forma compatta:

$$\{v\}^T = [\vec{t}_\alpha , \vec{t}_\beta , \vec{n}]$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \{v\}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{A_{,\beta}}{B} & \frac{A}{R_\alpha} \\ \frac{A_{,\beta}}{B} & 0 & 0 \\ -\frac{A}{R_\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \{v\} \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \{v\}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{B_{,\alpha}}{A} & 0 \\ -\frac{B_{,\alpha}}{A} & 0 & \frac{B}{R_\beta} \\ 0 & -\frac{B}{R_\beta} & 0 \end{bmatrix} \cdot \{v\} \quad (2.57)$$

Le condizioni di Gauss-Codazzi

Verranno ora derivate tre equazioni differenziali, note come *condizioni di Gauss-Codazzi* che legano tra loro le quantità A , B , R_α , R_β che caratterizzano una data superficie. Queste equazioni, utilizzate nel *teorema fondamentale delle superfici di Bonnet*, permettono di accertare se un'arbitraria scelta di questi quattro parametri definisce una superficie valida. Le condizioni cercate discendono dall'eguaglianza delle derivate seconde miste dei versori, il che presuppone che i versori abbiano derivata seconda continua. In base a quanto detto allora si può scrivere:

$$\vec{n}_{,\alpha,\beta} = \vec{n}_{,\beta,\alpha}$$

e quindi richiamando la 2.49 e la 2.50:

$$\left(\frac{A}{R_\alpha} \vec{t}_\alpha\right)_{,\beta} = \left(\frac{B}{R_\beta} \vec{t}_\beta\right)_{,\alpha}$$

Se si prosegue nella derivazione si perviene alla relazione:

$$\vec{t}_\alpha \left[\left(\frac{A}{R_\alpha}\right)_{,\beta} - \frac{A_{,\beta}}{R_\beta} \right] + \vec{t}_\beta \left[- \left(\frac{B}{R_\beta}\right)_{,\alpha} + \frac{B_{,\alpha}}{R_\alpha} \right] = 0 \quad (2.58)$$

dalla quale risultano immediatamente le condizioni cercate:

$$\frac{A_{,\beta}}{R_\beta} = \left(\frac{A}{R_\alpha}\right)_{,\beta} \quad (2.59)$$

$$\frac{B_{,\alpha}}{R_\alpha} = \left(\frac{B}{R_\beta}\right)_{,\alpha} \quad (2.60)$$

note come *Condizioni di Codazzi*.

Ponendo ora:

$$\vec{t}_{\alpha,\alpha,\beta} = \vec{t}_{\alpha,\beta,\alpha}$$

sostituendo la 2.52 e la 2.53 e proseguendo nella derivazione, si ottengono due relazioni delle quali una è stata già ottenuta, mentre l'altra è:

$$\left(\frac{A_{,\beta}}{B}\right)_{,\beta} + \frac{A}{R_\alpha} \frac{B}{R_\beta} + \left(\frac{B_{,\alpha}}{A}\right)_{,\alpha} = 0 \quad (2.61)$$

nota come *Condizione di Gauss*.

Sono date quindi tre relazioni che legano in modo omogeneo quattro quantità. Dato che non è ammessa la soluzione banale nulla, allora non darà certamente informazioni lo sviluppo della relazione:

$$\vec{t}_{\alpha,\alpha,\beta} = \vec{t}_{\alpha,\beta,\alpha}$$

Teorema fondamentale delle superfici di Bonnet

Se L, N, E, G sono date come funzione delle coordinate curvilinee α , e β , sono sufficientemente differenziabili e soddisfano le condizioni di Gauss-Codazzi con $E > 0$ e $G > 0$, allora esiste una superficie che ha come prima e seconda forma fondamentale:

$$I FF = E (d\alpha)^2 + G (d\beta)^2$$

$$II FF = L (d\alpha)^2 + N (d\beta)^2$$

Questa superficie è determinata in modo univoco a meno di una traslazione nello spazio.

2.3 Le coordinate del guscio.

Per individuare la posizione di un punto arbitrario appartenente ad un guscio in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, è conveniente introdurre il seguente vettore posizione:

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \vec{P}_0$$

con P_0 appartenente a Σ , cioè alla superficie di riferimento.

Osservando la Figura 2.5, il vettore \vec{OP} può essere espresso anche nel seguente modo:

$$\vec{R}(\alpha, \beta, \zeta) = \vec{r}(\alpha, \beta) + \zeta \vec{n}(\alpha, \beta)$$

con:

$$\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$$

$$\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$$

in cui:

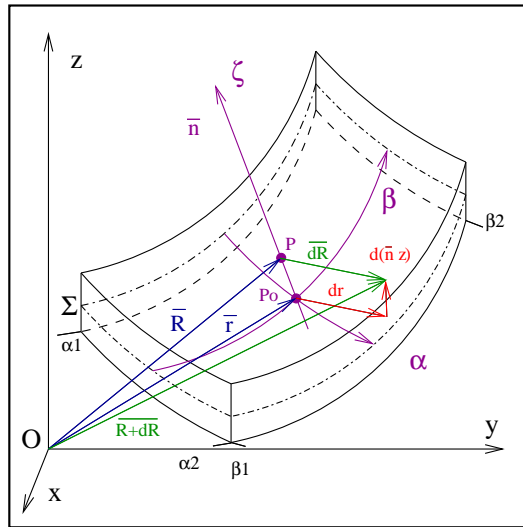


Figura 2.5. Individuazione di un punto del guscio.

- \vec{r} indica la posizione del punto P_0 individuato dall'intersezione tra la normale a Σ passante per P e Σ stessa
- \vec{n} è il versore normale a Σ nel punto P_0
- ζ è la distanza con segno di P da P_0

La variazione elementare del vettore posizione può essere così espressa:

$$d\vec{R} = \vec{R}_{,\alpha} d\alpha + \vec{R}_{,\beta} d\beta + \vec{R}_{,\zeta} d\zeta$$

ed anche:

$$d\vec{R} = d\vec{r} + d(\vec{n}\zeta)$$

$$d\vec{R} = d\vec{r} + d\vec{n}\zeta + \vec{n} d\zeta$$

per cui:

- $d\vec{r} = \vec{r}_{,\alpha} d\alpha + \vec{r}_{,\beta} d\beta$
- $d\vec{n} = \vec{n}_{,\alpha} d\alpha + \vec{n}_{,\beta} d\beta$

- $\vec{R}_{,\alpha} d\alpha = \vec{r}_{,\alpha} d\alpha + \zeta \vec{n}_{,\alpha} d\alpha$
- $\vec{R}_{,\beta} d\beta = \vec{r}_{,\beta} d\beta + \zeta \vec{n}_{,\beta} d\beta$
- $\vec{R}_{,\zeta} d\zeta = \vec{n} d\zeta$

Si può quindi esprimere il quadrato del modulo di $d\vec{R}$ come:

$$\begin{aligned}
 (dS)^2 &= d\vec{R} \cdot d\vec{R} = (\vec{R}_{,\alpha} \cdot \vec{R}_{,\alpha}) \\
 &\quad (d\alpha)^2 + (\vec{R}_{,\beta} \cdot \vec{R}_{,\beta})(d\beta)^2 + \\
 &\quad (\vec{R}_{,\zeta} \cdot \vec{R}_{,\zeta})(d\zeta)^2
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

e ricordando le definizioni di A e \vec{t}_α si ottiene:

$$(dS)^2 = H_\alpha^2 (d\alpha)^2 + H_\beta^2 (d\beta)^2 + H_\zeta^2 (d\zeta)^2 \tag{2.63}$$

in cui:

$$H_\alpha = A \left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha} \right) \tag{2.64}$$

$$H_\beta = B \left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta} \right) \tag{2.65}$$

$$H_\zeta = 1 \tag{2.66}$$

sono i *Coefficienti di Lamè* e:

$$\vec{R}_{,\alpha} = H_\alpha \vec{t}_\alpha \tag{2.67}$$

$$\vec{R}_{,\beta} = H_\beta \vec{t}_\beta \tag{2.68}$$

Lungo le linee coordinate α e β le espressioni di dS diventano:

$$dS_\alpha = H_\alpha d\alpha \quad (2.69)$$

$$dS_\beta = H_\beta d\beta \quad (2.70)$$

Note le espressioni che forniscono la lunghezza dell'arco elementare in funzione di ζ , si possono valutare quelle delle areole elementari $d\Sigma_\alpha$ e $d\Sigma_\beta$ in funzione di ζ .

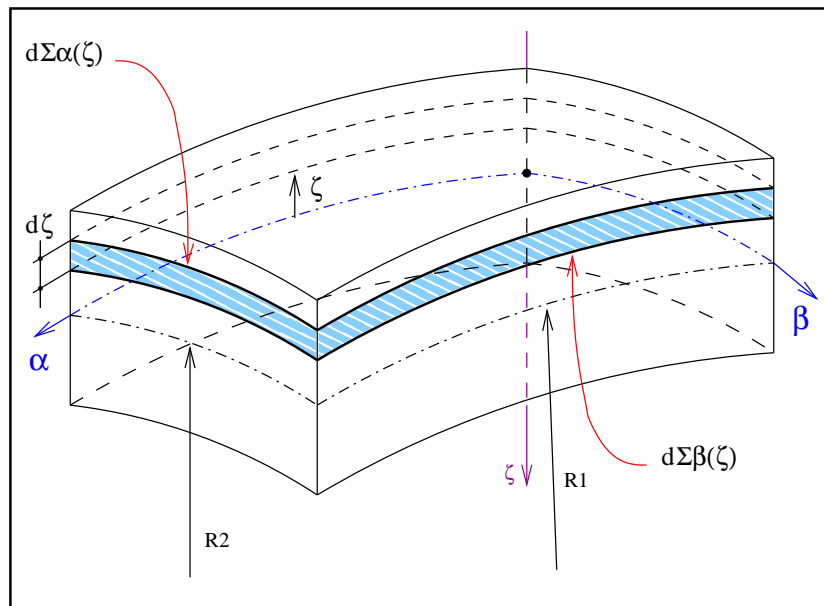


Figura 2.6. Individuazione degli elementi di superficie nel guscio.

Osservando la Figura 2.6 si ottengono facilmente le relazioni:

$$d\Sigma_\alpha(\zeta) = H_\alpha d\alpha d\zeta \quad (2.71)$$

$$d\Sigma_\beta(\zeta) = H_\beta d\beta d\zeta \quad (2.72)$$

che permettono il calcolo del volume elementare di guscio:

$$dV = H_\alpha H_\beta d\alpha d\beta d\zeta$$

Si cercherà per finire di esprimere l'elemento d'area dS_l appartenente al bordo del guscio considerato.

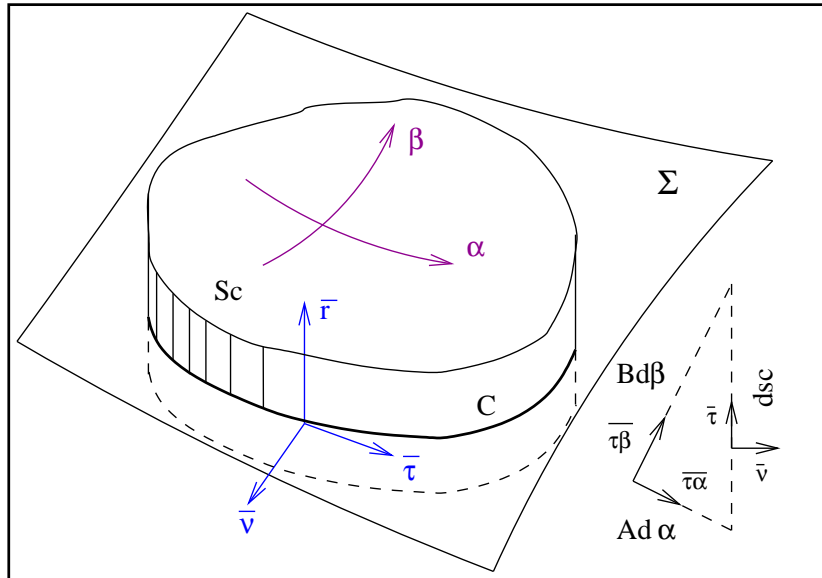


Figura 2.7. Elemento dsc sull'orlo Sc .

Se C è la curva definita dall'intersezione del bordo con la superficie di riferimento Σ ed s è la coordinata curvilinea su di essa fissata, si può considerare in ogni suo punto una terna di versori $(\vec{\nu}, \vec{\tau}, \vec{n})$ dei quali $\vec{\nu}$ è il versore normale, $\vec{\tau}$ quello tangente.

Osservando la Figura 2.7 risulta immediato esprimere dS_l :

$$\vec{\nu} = l\vec{t}_\alpha + m\vec{t}_\beta$$

$$H_\alpha d\alpha = ds(\zeta) m$$

$$H_\beta d\beta = ds(\zeta) l$$

ed essendo per $\zeta = 0$:

$$A d\alpha = ds m$$

$$B d\beta = ds l$$

si ottiene:

$$dS_l = ds(\zeta) d\zeta = \sqrt{\left[m\left(1 - \frac{\zeta}{R_\alpha}\right)\right]^2 + \left[l\left(1 - \frac{\zeta}{R_\beta}\right)\right]^2} d\zeta ds \quad (2.73)$$

Capitolo 3

Relazioni

spostamenti-deformazioni

3.1 Introduzione

Nel capitolo precedente sono state richiamate le relazioni geometriche che ora permetteranno di ottenere quelle che legano gli spostamenti alle deformazioni. Si vogliono ricavare cioè le espressioni generali degli *allungamenti unitari* e_{11} , e_{22} , e_{33} , e degli *scorrimenti angolari* e_{12} , e_{13} , e_{23} .

3.2 Espressioni generali degli allungamenti unitari e degli scorrimenti angolari

Si consideri un riferimento fisso cartesiano ortogonale destrorso (x_1, x_2, x_3) , ed un sistema di coordinate curvilinee ortogonali (y_1, y_2, y_3) . Si supponga che tra i due sistemi sussistano le seguenti relazioni:

$$x_i = f_i(y_1, y_2, y_3)$$

e:

$$y_i = g_i(x_1, x_2, x_3)$$

con $i = 1, \dots, 3$.

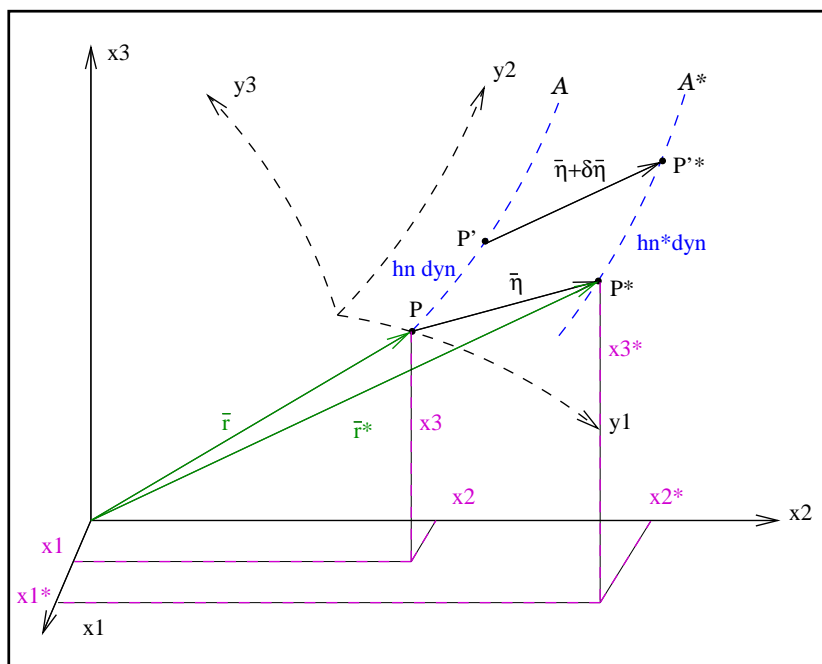


Figura 3.1. Configurazioni indeformata e deformata *.

Sia \vec{r} il vettore che individua la posizione del punto P visto come appartenente ad una linea \mathcal{A} del corpo generico considerato in una configurazione indeformata. Si indichi con $P' = P + dP$ un altro punto di \mathcal{A} . Per effetto di una deformazione imposta al corpo, i punti P e P' si sposteranno e, a partire dalla configurazione indeformata, la loro nuova posizione sarà individuata per mezzo dei vettori $\vec{\eta}$ e $\vec{\eta}' = \vec{\eta} + d\vec{\eta}$ sulla linea \mathcal{A}' . Si indichi con:

$$\vec{\eta} = \eta_1^y \vec{j}_1 + \eta_2^y \vec{j}_2 + \eta_3^y \vec{j}_3$$

$$\vec{\eta} = \eta_1^x \vec{i}_1 + \eta_2^x \vec{i}_2 + \eta_3^x \vec{i}_3$$

le espressioni del vettore spostamento nei due riferimenti introdotti, e con:

$$\vec{r} = x_1 \vec{l}_1 + x_2 \vec{l}_2 + x_3 \vec{l}_3$$

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \vec{\eta} = x_1^* \vec{l}_1 + x_2^* \vec{l}_2 + x_3^* \vec{l}_3$$

le posizioni di P nel corpo indeformato e di P' nel corpo deformato. Data una direzione y_n allora la relazione che fornisce l'allungamento relativo è:

$$e_{nn} = \frac{\frac{dS^*}{dy_n} - \frac{dS}{dy_n}}{\frac{dS}{dy_n}} \quad \text{con } n = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

Derivando e quadrando \vec{r} e \vec{r}^* si ottiene:

$$\frac{d\vec{r}}{dy_n} \cdot \frac{d\vec{r}}{dy_n} = \left(\frac{dS}{dy_n} \right)^2 = h_n^2 \quad (3.2)$$

$$\frac{d\vec{r}^*}{dy_n} \cdot \frac{d\vec{r}^*}{dy_n} = \left(\frac{dS^*}{dy_n} \right)^2 = (h_n^*)^2 \quad (3.3)$$

e quindi:

$$dS = dy_n h_n \quad (3.4)$$

$$dS^* = dy_n h_n^* \quad (3.5)$$

La 3.4 e la 3.5 rappresentano rispettivamente la lunghezza dell'elemento di curva \mathcal{A} compreso tra i punti P e P' nel continuo indeformato, e la lunghezza dello stesso elemento visto come appartenente al continuo deformato. Si osserva inoltre che se y_n giace proprio sulla curva \mathcal{A} , ne definisce l'ascissa curvilinea e $h_n = 1$. Dalle relazioni sopra scritte si può quindi concludere che:

$$e_{nn} = \frac{h_n^* - h_n}{h_n} = \frac{1}{h_n} \frac{dS^*}{dy_n} - 1 \quad (3.6)$$

e in definitiva:

$$e_{nn} = \frac{1}{h_n} \sqrt{\left(\frac{dx_1^*}{dy_n}\right)^2 + \left(\frac{dx_2^*}{dy_n}\right)^2 + \left(\frac{dx_3^*}{dy_n}\right)^2} - 1 \quad \text{con } n = 1,2,3 \quad (3.7)$$

Lo scorrimento angolare tra due direzioni y_n e y_m può essere valutato considerando il triangolo formato dai vettori:

- $\frac{d\vec{r}^*}{dy_n} \frac{1}{h_n}$
- $\frac{d\vec{r}^*}{dy_m} \frac{1}{h_m}$
- $\frac{d\vec{r}^*}{dy_m} \frac{1}{h_m} - \frac{d\vec{r}^*}{dy_n} \frac{1}{h_n}$

e utilizzando la formula di Carnot. La relazione cercata:

$$e_{mn} = \arcsin \frac{\left(\frac{dS^*}{dy_m}\right)^2 \frac{1}{h_m^2} + \left(\frac{dS^*}{dy_n}\right)^2 \frac{1}{h_n^2} - \left|\frac{d\vec{r}^*}{dy_m} \frac{1}{h_m} - \frac{d\vec{r}^*}{dy_n} \frac{1}{h_n}\right|^2}{\frac{2}{h_m h_n} \frac{dS^*}{dy_n} \frac{dS^*}{dy_m}} \quad (3.8)$$

fornisce l'espressione dello scorrimento angolare tra le due direzioni y_n e y_m .

3.3 Relazioni spostamenti-deformazioni.

Le relazioni generali sopra trovate possono essere particolarizzate al caso in cui si abbia a che fare con un guscio generico, in corrispondenza della cui superficie di riferimento sia fissato un sistema di coordinate curvilinee ortogonale (α, β, ζ) . La forma assunta da dette relazioni verrà ora riportata illustrando la dimostrazione del procedimento che porta all'ottenimento di una sola di queste essendo le altre ottenibili in modo del tutto analogo a quello mostrato. Se si vuole per esempio l'espressione della $\varepsilon_{\alpha\alpha}$, basta ricordare la 3.6, la 3.3, e porre $y_n = \alpha$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{r}^*}{d\alpha} \cdot \frac{d\vec{r}^*}{d\alpha} &= \\
 &= \left(\frac{d}{d\alpha} (\vec{r}_o + \zeta \vec{n} + \vec{\eta}) \right)^2 \\
 &= \left(A\vec{t}_\alpha + \zeta \vec{n}_{,\alpha} + \frac{d\vec{\eta}}{d\alpha} \right)^2 \\
 &= \left(A\vec{t}_\alpha - \zeta \frac{A}{R_\alpha} \vec{t}_\alpha + \frac{d\vec{\eta}}{d\alpha} \right)^2 \\
 &= \left(H_\alpha \vec{t}_\alpha + u_{,\alpha} \vec{t}_\alpha + v_\alpha \vec{t}_{,\beta} + w_{,\alpha} \vec{n} + u \vec{t}_{\alpha,\alpha} + v \vec{t}_{\beta,\alpha} + w \vec{n}_{,\alpha} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\frac{dS}{d\alpha} = H_\alpha$$

Introducendo queste relazioni nella 3.6 si ottiene:

$$H_\alpha \varepsilon_{\alpha\alpha} = \sqrt{H_\alpha^2 + 2H_\alpha \left(u_{,\alpha} + v \frac{A_{,\beta}}{B} - w \frac{A}{R_\alpha} \right) + \Delta} - H_\alpha \quad (3.9)$$

con:

$$\Delta = u_{,\alpha}^2 v_{,\alpha}^2 + w_{,\alpha}^2 + u^2 \left[\left(\frac{A}{R_\alpha} \right)^2 + \left(\frac{A_{,\beta}}{B} \right)^2 \right] + v^2 \left(\frac{A_{,\beta}}{B} \right)^2 + w^2 \left(\frac{A}{R_\alpha} \right)^2$$

che è l'espressione completa della $\varepsilon_{\alpha\alpha}$. L'espressione lineare può essere ottenuta portando H_α fuori da segno di radice, trascurando i termini quadratici e sviluppando la radice¹ stessa:

$$H_\alpha \varepsilon_{\alpha\alpha} = u_{,\alpha} + v \frac{A_{,\beta}}{B} - w \frac{A}{R_\alpha} \quad (3.10)$$

Le altre relazioni sono:

¹Basta porre $\sqrt{1 + \varepsilon} \simeq 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ con $\varepsilon \ll 1$.

$$H_\beta \varepsilon_{\beta\beta} = v_{,\beta} + u \frac{B_{,\alpha}}{A} - w \frac{B}{R_\beta} \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = w_{,\zeta} \quad (3.12)$$

$$H_\alpha H_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} = H_\alpha^2 (H_\alpha^{-1} u)_{,\beta} + H_\beta^2 (H_\beta^{-1} v)_{,\alpha} \quad (3.13)$$

$$H_\alpha \varepsilon_{\alpha\zeta} = w_{,\alpha} + H_\alpha^2 (H_\alpha^{-1} u)_{,\zeta} \quad (3.14)$$

$$H_\beta \varepsilon_{\beta\zeta} = w_{,\beta} + H_\beta^2 (H_\beta^{-1} v)_{,\zeta} \quad (3.15)$$

Si hanno a questo punto tutti i mezzi per poter ricavare le equazioni di equilibrio dinamico del guscio stratificato.

Capitolo 4

Equazioni di equilibrio dinamico del guscio multistrato

4.1 Introduzione

In questo capitolo verranno ricavate le equazioni generali del moto di un guscio multistrato e le condizioni al contorno, facendo uso del principio dei lavori virtuali.

4.1.1 Il principio dei lavori virtuali.

Il principio dei lavori virtuali può essere così enunciato:

Un dato corpo è in equilibrio sotto l'azione di un sistema di carichi esterni, se ad esso viene applicato un sistema di spostamenti virtuali qualunque, ed il lavoro virtuale complessivamente compiuto dalle forze esterne ed interne durante detto spostamento è nullo.

Un modo alternativo di enunciare il principio dei lavori virtuali consiste nel dire che:

Un dato corpo è in equilibrio sotto l'azione di un sistema di carichi esterni, se ad esso si applica un qualunque sistema di spostamenti virtuali, ed il lavoro

virtuale compiuto durante lo spostamento dalle forze interne uguaglia quello compiuto dalle forze esterne.

Si ricorda inoltre che:

Uno spostamento virtuale è uno spostamento infinitesimo, indipendente dal tempo, che soddisfa le condizioni di congruenza interne ed esterne, non provocando quindi compenetrazioni o distacchi all'interno del corpo ed essendo rispettoso dei vincoli esterni.

È inoltre opportuno notare come tra le forze esterne possano essere conteggiate le forze d'inerzia operando dal punto di vista di d'Alembert. Il lavoro virtuale compiuto complessivamente sotto un sistema di spostamenti virtuali, nel caso più generale in cui si consideri il caso dinamico, può essere concettualmente diviso in tre contributi:

1. Lavoro virtuale di deformazione $\delta\Phi$
2. Lavoro virtuale delle forze esterne δL^e
3. Lavoro virtuale delle forze d'inerzia δL^{in}

Il principio dei lavori virtuali, facendo riferimento al secondo enunciato può essere così scritto:

$$\delta\Phi = \delta L^e + \delta L^{in}$$

in cui:

- $\delta\Phi = \int_V \{\sigma\}^T \delta\{\varepsilon\} dV$
- $\delta L^e = \int_S \{f\}^T \delta\{s\} dS + \int_V \{X\}^T \delta\{s\} dV$
- $\delta L^{in} = - \int_V \rho \{\ddot{s}\}^T \delta\{s\} dV$

ed i vari simboli hanno i seguenti significati:

- V è il volume del corpo

- $\{\sigma\}$ è il vettore delle componenti di tensione
- $\delta\{\varepsilon\}$ è il vettore delle componenti virtuali di deformazione
- S è la superficie esterna del corpo
- $\{f\}$ è il vettore delle forze esterne superficiali
- $\{X\}$ è il vettore delle forze di volume
- $\delta\{s\}^T$ è il vettore delle tre componenti di spostamento virtuale
- ρ è la densità locale del materiale

Al fine di esplicitare ciascuno dei contributi sopra descritti, si è fatto riferimento ad un particolare modello di spostamento le cui caratteristiche vale la pena riassumere assieme a considerazioni generali che aiuteranno a comprenderne l'importanza.

4.1.2 Considerazioni relative ai vari modelli di spostamento.

Le possibilità costruttive presentate dai materiali compositi a matrice polimerica rinforzati con fibre, incontrano un notevole interesse da parte dei costruttori poiché essi sono in grado di offrire elevate prestazioni specifiche in termini di rigidità e di resistenza, permettendo inoltre la realizzazione di strutture con ridotto numero di componenti e collegamenti forati rispetto a quelle tradizionali. L'analisi dei laminati compositi si basa principalmente su due classi di teorie:

- Teoria dell'elasticità tridimensionale;
- Teorie bidimensionali dei laminati.

Nella teoria dell'elasticità tridimensionale ogni strato è trattato come un continuo elastico con proprietà diverse dagli strati adiacenti. Pur esistendo molti lavori in proposito, è evidente come nelle condizioni più generali di geometria, di carico e di vincolo, la soluzione del problema presenta difficoltà pressoché insormontabili. In questa ottica si giustifica quindi il tentativo di sviluppare modelli operativi semplificati che, pur cogliendo gli aspetti salienti del comportamento strutturale, permettono di ottenere soluzioni non eccessivamente onerose. Tra questi modelli operativi si hanno quelli delle piastre laminate e dei gusci sottili. In tali modelli si assume che le singole lamine siano elastiche e perfettamente giuntate tra loro, e si ammette che il campo di spostamenti assuma un'espressione semplificata. Si cerca quindi di scrivere le equazioni che governano il comportamento elastico del modello semplificato, ad esempio facendo uso, come sopra detto, del principio dei lavori virtuali. Le proprietà del laminato, ad esempio le rigidità, diventano così proprietà globali, ottenute integrando quelle delle singole lamine lungo lo spessore. Per molti problemi ingegneristici la Teoria classica del laminato detta anche di Kirchhoff o CLT, fornisce già risultati soddisfacenti. In questo caso, gli spostamenti u , v , w , del punto, funzioni generalmente di x , y , z assumono l'espressione semplificata:

$$\begin{aligned}u &= u^o - zw_{,x}^o \\v &= v^o - zw_{,y}^o \\w &= w^o\end{aligned}$$

in cui z è l'asse normale al piano di riferimento xy , e u^o , v^o , w^o rappresentano gli spostamenti dei punti giacenti sul piano di riferimento. Fisicamente questa formulazione equivale ad imporre che la normale alla superficie di riferimento resti rettilinea, normale a detta superficie e di lunghezza invariata durante la deformazione. Si mostra facilmente che ciò equivale ad

ammettere che sia:

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy} \neq 0$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_z = 0$$

Il modello quindi considera nulla la deformabilità a taglio trasversale della piastra o del guscio. I limiti di applicabilità della CLT sono stati oggetto di numerose ricerche, confrontando i risultati approssimati con quelli ottenuti da soluzioni esatte (teoria dell'elasticità tridimensionale). Le conclusioni cui si perviene possono essere così sintetizzate:

1. L'accuratezza dei risultati forniti dalla CLT sul comportamento globale delle piastre (freccie, distribuzioni delle tensioni lungo lo spessore, frequenze proprie, ecc.) dipende non solo dal parametro di spessore (a/h) della piastra, ma anche dai parametri di laminazione e dal grado di anisotropia dei singoli strati.
2. In genere la CLT fornisce una descrizione poco attendibile del comportamento meccanico del laminato per bassi valori del parametro di spessore; all'aumentare del valore di tale parametro (in genere per $a/h > 30$) la descrizione diventa sempre più attendibile e tende a convergere a quella fornita dalla soluzione esatta.
3. La convergenza è più rapida per le componenti di tensione che per i valori della freccia.
4. In genere, non è possibile per valori di $a/h < 30$ trascurare gli effetti della deformabilità a taglio trasversale.

Ne consegue la necessità, per le piastre relativamente spesse e costruite con materiali caratterizzati da valori elevati del rapporto dei moduli elastici, di sviluppare un modello bidimensionale che tenga in conto l'effetto della

deformabilità a taglio trasversale. Allo scopo Whitney e Pagano, sulla base del lavoro fatto da Mindlin per i materiali isotropi, hanno formulato il seguente modello di spostamento indicato come First order Shear Deformation Theory o FSDT:

$$\begin{aligned} u &= u^o + z\phi_{,x} \\ v &= v^o + z\phi_{,y} \\ w &= w^o \end{aligned}$$

in cui ϕ_x e ϕ_y rappresentano le rotazioni della normale alla superficie di riferimento nei piani xz ed yz . Fisicamente questa formulazione equivale ad imporre che la normale alla superficie di riferimento resti rettilinea, di lunghezza invariata, ma non più perpendicolare a detta superficie a causa della deformazione di taglio. Una serie di confronti tra i risultati forniti dalla FSDT e la soluzione esatta, ha messo in evidenza che:

1. Per ottenere delle previsioni accurate del valore della freccia e della prima frequenza propria di vibrazione è necessario introdurre un fattore numerico K , detto fattore correttivo del taglio. Tale fattore ha lo scopo di tenere in conto che con la distribuzione lungo lo spessore di σ_x , σ_y , σ_{xy} derivante dal modello assunto, la distribuzione di σ_{xz} , σ_{yz} , dovrebbe essere parabolica. Infatti essendo lineari le distribuzioni di ε_x , ε_y , ε_{xy} , tali risultano anche quelle di σ_x , σ_y , σ_{xy} . Poiché le σ_{xz} e le σ_{yz} si ottengono da queste ultime per integrazione rispetto a z , ne consegue la loro distribuzione parabolica. Viceversa, se si calcolano le distribuzioni delle σ_{xz} e le σ_{yz} partendo dal modello di spostamento assunto, si ottengono delle distribuzioni costanti lungo lo spessore. In genere il valore da attribuire a K viene determinato imponendo che dall'espressione approssimata della prima frequenza propria flessionale si ottenga un valore pari a quello fornito dalla teoria dell'elasticità

lineare. Va sottolineato che nel caso di piastre composite multistrato attribuire un valore corretto a K non è così semplice come per le piastre omogenee in quanto esso dipende dai parametri di laminazione e dal tipo di problema in esame.

2. Il modello fornisce, come quello di Kirchhoff, delle componenti di spostamento u e v lineari lungo lo spessore. Viceversa, le soluzioni esatte disponibili mostrano che per le piastre multistrato spesse costituite da lamine esterne aventi elevati moduli elastici longitudinali rispetto a quelli delle lamine interne, le distribuzioni degli spostamenti u e v lungo lo spessore presentano un andamento con derivata prima in z discontinua, vi è cioè una notevole distorsione della normale deformata soprattutto per bassi valori del rapporto di spessore a/h . Poiché si è detto che entrambi approcci citati CLT e FSDT, considerano il laminato come un singolo strato anisotropo equivalente e sono basati su una distribuzione lineare degli spostamenti u e v lungo lo spessore, si sono di conseguenza mostrati inadeguati per esprimere la distorsione della sezione causata dagli sforzi di taglio trasversale. Teorie più raffinate della FSDT, capaci di cogliere ulteriori aspetti del comportamento meccanico delle piastre inflesse, sono state suggerite da molti ricercatori. Queste teorie di ordine superiore possono essere raccolte in due classi:

- Teorie basate sulla assunzione di una distribuzione non lineare unica per l'intero laminato nella direzione dello spessore degli spostamenti nel piano o degli sforzi di taglio trasversale (*smearred laminate models*).
- Teorie basate sull'assunzione di un modello di spostamento o di una distribuzione delle tensioni definito strato per strato nella

direzione dello spessore (*discrete layer models*). Molte delle formulazioni appartenenti a questa categoria, anche se magari sono capaci di tenere in conto, oltre all'effetto del taglio trasversale, anche la deformazione lungo l'asse z , hanno però il difetto di introdurre un numero elevato di variabili incognite, con evidente incremento delle difficoltà di manipolazione.

4.2 Modello di spostamento utilizzato.

Il modello di spostamento adottato ha lo scopo di raggiungere due obiettivi:

1. Descrivere in modo quanto più possibile realistico il comportamento di un guscio laminato anche di notevole spessore relativo. In particolare esprimere automaticamente una distribuzione parabolica degli sforzi di taglio trasversale, garantendo contemporaneamente il loro annullamento sulle superfici esterne e la loro continuità alle interfacce interne.
2. Limitare il numero delle grandezze incognite a quello posseduto dalle teorie del primo ordine (FSDT), cioè cinque.

In sostanza, per gusci compositi multistrato costituiti da lamine perfettamente unite l'una all'altra, le funzioni di spostamento devono soddisfare le seguenti condizioni di continuità alle interfacce:

$$u(\zeta_k^-) = u(\zeta_k^+) \quad (4.1)$$

$$v(\zeta_k^-) = v(\zeta_k^+) \quad (4.2)$$

$$w(\zeta_k^-) = w(\zeta_k^+) \quad (4.3)$$

in cui ζ_k individua l'interfaccia tra lo strato k e quello $(k + 1)$. Inoltre per l'equilibrio alle interfacce deve essere:

$$\sigma_{\zeta\alpha}^- = \sigma_{\zeta\alpha}^+ \quad (4.4)$$

$$\sigma_{\zeta\beta}^- = \sigma_{\zeta\beta}^- \quad (4.5)$$

$$\sigma_{\zeta}^- = \sigma_{\zeta}^+ \quad (4.6)$$

Dalle prime tre equazioni deriva che le componenti di deformazione devono soddisfare le condizioni:

$$\varepsilon_{\alpha}^- = \varepsilon_{\alpha}^+ \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{\beta}^- = \varepsilon_{\beta}^+ \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^- = \varepsilon_{\alpha\beta}^+ \quad (4.9)$$

Ulteriori condizioni di contatto non possono essere imposte sulle altre componenti di tensione e di deformazione. Si porrà l'attenzione su modelli che assumono lo spostamento trasversale w indipendente dalla coordinata z e trascurando la tensione σ_{ζ} rispetto alle altre. In questo caso la terza e la sesta equazione risultano automaticamente soddisfatte. Questa assunzione pone evidentemente dei limiti al modello, e non sarà in grado di cogliere tutti i fenomeni locali che insorgono in corrispondenza dei bordi liberi o dei fori di un laminato tendenti spesso a causarne la delaminazione. È intuitivo che per garantire una distribuzione quadratica alle componenti $\sigma_{\alpha\zeta}$ e $\sigma_{\beta\zeta}$ e quindi anche alle corrispondenti componenti di deformazione, è necessario assumere una distribuzione del terzo ordine per u e per v . Ciò non è però sufficiente a soddisfare le condizioni di continuità imposte dalla quarta e dalla quinta equazione se, in generale, le caratteristiche meccaniche variano da strato a strato. Inoltre, come già detto, mentre in genere la soluzione esatta fornisce per le componenti u e v dello spostamento un andamento lungo lo spessore con derivata in z discontinua, un modello avente le caratteristiche fin ora richieste fornirebbe solo un andamento cubico. Per recuperare quindi la

validità delle relazioni quarta e quinta ed avere un andamento cubico con derivata in z discontinua lungo lo spessore, si adotta il modello suggerito dal Prof. Di Sciuva [4]: partendo dal modello cubico proposto da J.N.Reddy, d'ora in poi indicato con R, avente la proprietà di assicurare la distribuzione quadratica di $\sigma_{\alpha\zeta}$ e di $\sigma_{\beta\zeta}$ e di garantire il loro annullamento alle superfici libere, si ottiene un nuovo modello sommando a questo un contributo lineare a tratti, modello ZZ, avente lo scopo di recuperare la continuità di $\sigma_{\alpha\zeta}$ e di $\sigma_{\beta\zeta}$ alle interfacce e di conferire agli spostamenti u e v una distribuzione a 'zig-zag' lungo lo spessore. Questo nuovo modello viene indicato come *modello RZ* e si presenta, in coordinate curvilinee ortogonali sulla superficie di riferimento Ω , come:

$$\begin{aligned} u(\alpha,\beta,\zeta;t) = & (1 - R_{\alpha}^{-1}\zeta)u^o - \zeta A^{-1}w_{,\alpha}^o + f(\zeta)g_{\alpha} \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} \theta_k(\zeta - \zeta_k Y_k) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} v(\alpha,\beta,\zeta;t) = & (1 - R_{\beta}^{-1}\zeta)v^o - \zeta B^{-1}w_{,\beta}^o + f(\zeta)g_{\beta} \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} \psi_k(\zeta - \zeta_k Y_k) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$w(\alpha,\beta,\zeta;t) = w^o \quad (4.12)$$

dove:

$$f(\zeta) = \zeta (\delta_F - \delta_T \frac{4}{3h^2} \zeta^2)$$

t rappresenta il tempo, N è il numero di strati del laminato, h è lo spessore del laminato, g_{α} e g_{β} le rotazioni della normale a Ω dovute al taglio rispettivamente nei piani (α,ζ) e (β,ζ) , θ_k e ψ_k sono funzioni incognite di α e

β , Y_k è la funzione di Heaviside che vale 0 per $\zeta < \zeta_k$ e 1 per $\zeta \geq \zeta_k$, δ_F e δ_T sono degli operatori che valgono 1 o 0 a seconda del modello di spostamento cui ci si vuole ricondurre se non si vuole utilizzare lo RZ:

Termini annullati Modello

<i>nessuno</i>	<i>RZ</i>
δ_T	<i>ZZ</i>
θ_k, ψ_k	<i>R</i>
$\delta_T, \theta_k, \psi_k$	<i>FSDT modificato</i>
$\delta_F, \delta_T, \theta_k, \psi_k$	<i>CLT</i>

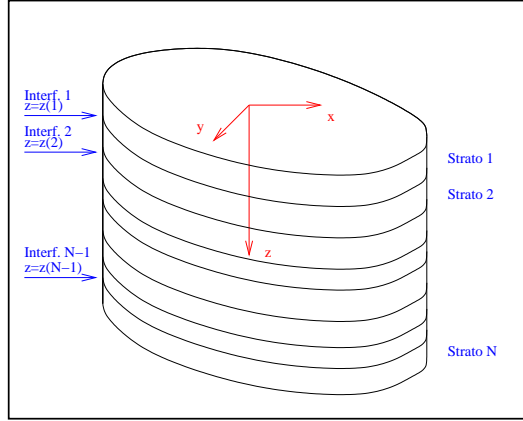


Figura 4.1. Configurazione geometrica del laminato.

Non è difficile rendersi conto del fatto che le componenti u e v sono continue cubiche a tratti, qualunque siano le funzioni θ_k e ψ_k purché continue. Le condizioni 4.1 e 4.2 sono quindi automaticamente soddisfatte insieme alle:

$$\sigma_{\alpha\zeta}(\alpha, bg, -h/2) = 0$$

$$\sigma_{\alpha\zeta}(\alpha, bg, -h/2) = 0$$

Restano allora da soddisfare le condizioni di continuità alle interfacce 4.4 e 4.5 mediante l'imposizione delle quali si ottengono per θ_k e ψ_k le seguenti relazioni:

$$\theta_k = a_k g_\alpha + c_k g_\beta \quad (4.13)$$

$$\psi_k = d_k g_\alpha + b_k g_\beta \quad (4.14)$$

con:

$$a_k = A_k (f, \zeta)_k + A_k \sum_{q=1}^{k-1} a_q + C_k \sum_{q=1}^{k-1} d_q \quad (4.15)$$

$$c_k = C_k (f, \zeta)_k + C_k \sum_{q=1}^{k-1} b_q + A_k \sum_{q=1}^{k-1} c_q \quad (4.16)$$

$$b_k = B_k (f, \zeta)_k + B_k \sum_{q=1}^{k-1} b_q + D_k \sum_{q=1}^{k-1} c_q \quad (4.17)$$

$$d_k = D_k (f, \zeta)_k + D_k \sum_{q=1}^{k-1} a_q + B_k \sum_{q=1}^{k-1} d_q \quad (4.18)$$

dove:

$$A_k = \frac{Q_{45k} Q_{45k+1} - Q_{44k} Q_{55k+1}}{\mathcal{R}_k} - 1 \quad (4.19)$$

$$B_k = \frac{Q_{45k} Q_{45k+1} - Q_{55k} Q_{44k+1}}{\mathcal{R}_k} - 1 \quad (4.20)$$

$$C_k = \frac{Q_{55k} Q_{45k+1} - Q_{45k} Q_{55k+1}}{\mathcal{R}_k} - 1 \quad (4.21)$$

$$D_k = \frac{Q_{44k} Q_{45k+1} - Q_{45k} Q_{44k+1}}{\mathcal{R}_k} - 1 \quad (4.22)$$

$$\mathcal{R}_k = Q_{45k+1}^2 - Q_{44k+1} Q_{55k+1} \quad (4.23)$$

Nelle relazioni sopra riportate la notazione $(f, \zeta)_k$ rappresenta la derivata rispetto a ζ della f valutata in $\zeta = \zeta_k$. Inoltre, le Q_{ijk} sono le *rigidezze ridotte* dello strato k-esimo nelle coordinate curvilinee (α, β, ζ) :

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad \text{per } i,j = 1,2,3 \text{ e } Q_{ij} = C_{ij} \text{ per } i,j = 4,5 \quad (4.24)$$

mentre le C_{ij} sono i coefficienti che compaiono nella *Legge di Hooke generalizzata* per un materiale anisotropo:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\alpha} \\ \sigma_{\beta\beta} \\ \sigma_{\zeta\zeta} \\ \sigma_{\alpha\zeta} \\ \sigma_{\beta\zeta} \\ \sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\alpha} \\ \varepsilon_{\beta\beta} \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} \\ \varepsilon_{\alpha\zeta} \\ \varepsilon_{\beta\zeta} \\ \varepsilon_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

È da notare che, essendo a_k, b_k, c_k, d_k , costanti note a priori perché funzioni delle sole caratteristiche meccaniche degli strati, il presente approccio permette di formulare un modello per il guscio multistrato, del tipo appartenente alla categoria dei *discrete layer* senza però la penalizzazione di avere l'incremento delle coordinate generalizzate con l'aumento del numero degli strati. In altre parole questa formulazione del modello di spostamento da origine ad un sistema di equazioni del moto caratterizzato dallo stesso numero di coordinate generalizzate come nel caso della FSDT.

Relazioni tra tensioni e deformazioni per materiale ortotropo

La legge di Hooke lega le componenti di tensione alle componenti di deformazione in uno stato di tensione e di deformazione generico. Per un materiale ortotropo quest'ultima può essere scritta indicando con (1,2,3) gli assi di ortotropia, come:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

Le costanti C'_{ij} di rigidezza che qui compaiono, possono essere messe in relazione con le costanti ingegneristiche del materiale. Per una lamina composita, indicando con $L \equiv 1$ la direzione secondo cui sono disposte le fibre e con $T \equiv 2,3$ le due direzioni trasversali (le direzioni principali 2 e 3, ortogonali alle fibre godono delle stesse proprietà elastiche) si può scrivere:

$$C'_{11} = \frac{1 - \nu_{TT}^2}{\Delta E_T^2}$$

$$C'_{12} = C'_{13} = \frac{\nu_{LT}(1 + \nu_{TT})}{\Delta E_T E_T}$$

$$C'_{22} = C'_{33} = \frac{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}{\Delta E_T E_T}$$

$$C'_{23} = \frac{\nu_{TT} + \nu_{LT}\nu_{TL}}{\Delta E_T E_T}$$

$$C'_{44} = C'_{66} = G_{LT}$$

$$C'_{55} = G_{TT}$$

$$\Delta = \frac{1 - 2\nu_{LT}\nu_{TL}(1 + \nu_{TT}) - \nu_{TT}^2}{E_L E_T^2}$$

$$\nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}$$

in cui:

- E_L ed E_T sono i moduli di elasticità longitudinale rispettivamente in direzione parallela e trasversale alle fibre.
- G_{LT} e G_{TT} sono i moduli di elasticità trasversale rispettivamente nei piani LT e TT .
- ν rappresenta i diversi moduli di Poisson

Nel caso in cui il sistema di riferimento non coincida con il riferimento principale della lamina ortotropa, la legge di Hooke assume un'espressione leggermente più complessa:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Riferendosi al sistema di riferimento (α, β, ζ) in cui l'asse ζ coincide con l'asse 3 del riferimento principale, ma la cui direzione α è ruotata dell'angolo θ rispetto all'asse 1, i coefficienti C'_{ij} , che assumono il nome di *rigidezze trasformate* si scrivono, indicando con $m = \cos \theta$ e con $n = \sin \theta$:

$$C_{11} = m^4 C'_{11} + 2mn(C'_{12} + 2C'_{66}) + n^4$$

$$C_{12} = m^2 n^2 (C'_{11} + C'_{22} - 4C'_{66}) + (m^4 + n^4) C'_{12}$$

$$C_{13} = m^2 C'_{13} + n^2 C'_{23}$$

$$C_{16} = -mn[m^2 C'_{11} - n^2 C'_{22} - (m^2 - n^2)(C'_{12} + 2C'_{26})]$$

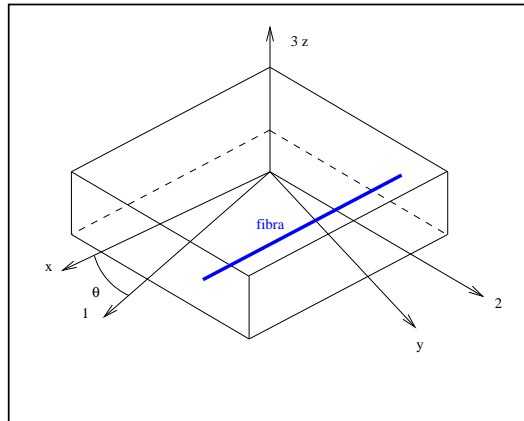


Figura 4.2. Sistemi di riferimento.

$$C_{22} = n^4 C_{11} + 2m^2 n^2 (C_{12} + 2C_{66} + m^4 C_{22})$$

$$C_{23} = n^2 C_{13} + m^2 C_{23}$$

$$C_{26} = -mn[n^2 C_{11} - m^2 C_{22} - (m^2 - n^2)(C_{12} + 2C_{66})]$$

$$C_{33} = C_{33}$$

$$C_{36} = mn(C_{23} - C_{13})$$

$$C_{44} = m^2 C_{44} + n^2 C_{55}$$

$$C_{45} = mn(C_{44} - C_{55})$$

$$C_{55} = m^2 C_{55} + n^2 C_{44}$$

$$C_{66} = m^2 n^2 (C_{11} + C_{22} - 2C_{12}) + (m^2 - n^2)^2 C_{66}$$

Si è precedentemente ammesso che, nel formulare il modello di spostamento, si sarebbe trascurata la tensione $\sigma_{\zeta\zeta}$ perché trascurabile rispetto alle altre. Il fatto di supporre $\sigma_{\zeta\zeta} = 0$ impone di riferirsi ad una espressione semplificata della legge di Hooke:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix}$$

Per le rigidezze ridotte trasformate valgono le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad \text{per } i,j = 1,2,6 \\ Q_{ij} &= C_{ij} \quad \text{per } i,j = 4,5 \end{aligned}$$

4.3 Relazioni tra spostamenti e componenti di deformazione.

Le relazioni linearizzate che legano le deformazioni agli spostamenti possono essere facilmente ottenute dalle 3.10, 3.11, 3.13, 3.14, 3.15 nelle quali vengono sostituite le espressioni 4.10, 4.11, 4.12 che esprimono la cinematica degli spostamenti in funzione delle coordinate generalizzate e sfruttando le condizioni di Gauss-Codazzi:

$$H_{\alpha}\varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon_{\alpha\alpha}^o + \zeta\varepsilon_{\alpha\alpha}^1 + \zeta^3\varepsilon_{\alpha\alpha}^3 + \sum_{k=1}^{N-1} (\theta_{k,\alpha} + A_{,\beta}B^{-1}\psi_k)(\zeta - \zeta_k) \quad (\mathbb{Y}_k 25)$$

$$H_{\beta}\varepsilon_{\beta\beta} = \varepsilon_{\beta\beta}^o + \zeta\varepsilon_{\beta\beta}^1 + \zeta^3\varepsilon_{\beta\beta}^3 + \sum_{k=1}^{N-1} (\psi_{k,\beta} + B_{,\alpha}A^{-1}\theta_k)(\zeta - \zeta_k) \quad (\mathbb{Y}_k 26)$$

$$\begin{aligned}
 H_\alpha H_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} = & \\
 & H_\alpha \{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{oa} + \zeta \varepsilon_{\alpha\beta}^{1a} + \zeta^3 \varepsilon_{\alpha\beta}^{3a} \} \\
 & + H_\beta \{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{ob} + \zeta \varepsilon_{\alpha\beta}^{1b} + \zeta^3 \varepsilon_{\alpha\beta}^{3b} \} \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} [H_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta}^{ka} + H_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}^{kb}] (\zeta - \zeta_k) Y_k
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$H_\alpha \varepsilon_{\alpha\zeta} = \varepsilon_{\alpha\zeta}^o + \zeta^2 \varepsilon_{\alpha\zeta}^2 + A \sum_{k=1}^{N-1} \theta_k (1 - R_\alpha^{-1} \zeta_k) Y_k \tag{4.28}$$

$$H_\beta \varepsilon_{\beta\zeta} = \varepsilon_{\beta\zeta}^o + \zeta^2 \varepsilon_{\beta\zeta}^2 + B \sum_{k=1}^{N-1} \psi_k (1 - R_\beta^{-1} \zeta_k) Y_k \tag{4.29}$$

I simboli che compaiono hanno le seguenti espressioni:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^o = u_{,\alpha}^o + A_{,\beta} B^{-1} v^o - A R_\alpha^{-1} w^o$$

$$\varepsilon_{\beta\beta}^o = v_{,\beta}^o + B_{,\alpha} A^{-1} u^o - B R_\beta^{-1} w^o$$

$$\varepsilon_{\alpha\zeta}^o = A \delta_{Fg\alpha}$$

$$\varepsilon_{\beta\zeta}^o = B \delta_{Fg\beta}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{oa} = u_{,\beta}^o - \frac{B_{,\alpha}}{A} v^o$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{ob} = v_{,\alpha}^o - \frac{A_{,\beta}}{B} u^o$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^1 = (\delta_F g_\alpha - A^{-1} w_{,\alpha}^o - R_\alpha^{-1} u^o)_{,\alpha} + A_{,\beta} B^{-1} (\delta_F g_\beta - B^{-1} w_{,\beta}^o - R_\beta^{-1} v^o)$$

$$\varepsilon_{\beta\beta}^1 = (\delta_F g_\beta - B^{-1} w_{,\beta}^o - R_\beta^{-1} v^o)_{,\beta} + B_{,\alpha} A^{-1} (\delta_F g_\alpha - A^{-1} w_{,\alpha}^o - R_\alpha^{-1} u^o)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{1a} = [(\delta_F g_\alpha - A^{-1} w_{,\alpha}^o - R_\alpha^{-1} u^o)_{,\beta} - (\delta_F g_\beta - B^{-1} w_{,\beta}^o - R_\beta^{-1} v^o) A^{-1} B_{,\alpha}]$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{1b} = [(\delta_F g_\beta - B^{-1} w_{,\beta}^o - R_\beta^{-1} v^o)_{,\alpha} - (\delta_F g_\alpha - A^{-1} w_{,\alpha}^o - R_\alpha^{-1} u^o) B^{-1} A_{,\beta}]$$

$$\varepsilon_{\alpha\zeta}^2 = -A \delta_T \frac{4}{h^2} g_\alpha$$

$$\varepsilon_{\beta\zeta}^2 = -B \delta_T \frac{4}{h^2} g_\beta$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}^3 = -\delta_T \frac{4}{3h^2} (g_{\alpha,\alpha} + A_{,\beta} B^{-1} g_\beta)$$

$$\varepsilon_{\beta\beta}^3 = -\delta_T \frac{4}{3h^2} (g_{\beta,\beta} + B_{,\alpha} A^{-1} g_\alpha)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{3a} = -d g_T \frac{4}{3h^2} (g_{\alpha,\beta} - A^{-1} B_{\alpha} g_\beta)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{3b} = -d g_T \frac{4}{3h^2} (g_{\beta,\alpha} - B^{-1} A_{\beta} g_\alpha)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{ka} = (\theta_{k,\beta} - A^{-1} B_{,\alpha} \psi_k)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{kb} = (\psi_{k,\alpha} - B^{-1} A_{,\beta} \theta_k)$$

Le espressioni ora ricavate saranno utilizzate per ricavare le equazioni di equilibrio dinamico del guscio stratificato, facendo uso del principio dei lavori virtuali.

4.4 Equazioni di equilibrio del guscio multistrato.

Verranno ora esplicitati i tre contributi che compaiono nell'equazione dei lavori virtuali:

$$\delta\Phi = \delta L^e + \delta L^{in}$$

che definisce l'equilibrio del corpo considerato.

4.4.1 Variazione virtuale dell'energia di deformazione elastica.

La variazione virtuale di energia di deformazione elastica può essere espressa dalla somma degli N contributi apportati dagli N strati di cui risulta composto il guscio stratificato:

$$\delta\Phi = \sum_{s=1}^N \int_{V_s} [\sigma_{\alpha\alpha} \delta\varepsilon_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta} \delta\varepsilon_{\beta\beta} + \sigma_{\alpha\beta} \delta\varepsilon_{\alpha\beta} + g_{\alpha\zeta} \delta\varepsilon_{\alpha\zeta} + \sigma_{\beta\zeta} \delta\varepsilon_{\beta\zeta}] H_\alpha H_\beta d\alpha d\beta d\zeta \quad (4.30)$$

Sostituendo nella 4.30 le espressioni delle componenti di tensione in funzione delle componenti di deformazione e sfruttando le 3.10, 3.11, 3.13, 3.14, 3.15, si ottiene l'espressione cercata in termini di variazioni virtuali delle coordinate generalizzate:

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & \\ & - \{ \int_\alpha \int_\beta \{ [(B N_{\alpha\alpha}),_\alpha + (A N_{\beta\alpha}),_\beta \\ & + N_{\alpha\beta} A_{,\beta} - N_{\beta\beta} B_{,\alpha} \\ & - A B R_\alpha^{-1} \tilde{Q}_\alpha] \delta u^\circ \\ & + [(A N_{\beta\beta}),_\beta + (B N_{\alpha\beta}),_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +N_{\beta\alpha} B_{,\alpha} - N_{\alpha\alpha} A_{,\beta} - B A R_{\beta}^{-1} \tilde{Q}_{\beta}] \delta v^{\circ} \\
& +[(B \tilde{Q}_{\alpha})_{,\alpha} + (A \tilde{Q}_{\beta})_{,\beta} \\
& +A B (N_{\alpha\alpha} R_{\alpha}^{-1} + N_{\beta\beta} R_{\beta}^{-1})] \delta w^{\circ} \\
& +[A B [\delta_F(\tilde{Q}_{\alpha} - Q_{\alpha}) \\
& +(\tilde{Q}_{\alpha}^a - Q_{\alpha}^a) + (\tilde{Q}_{\beta}^d - Q_{\beta}^d)] \\
& -\delta_T \frac{4}{3h^2} [(B P_{\alpha\alpha})_{,\alpha} - P_{\beta\beta} B_{,\alpha} + (A P_{\beta\alpha})_{,\beta} \\
& +P_{\alpha\beta} A_{,\beta} - 3 A B T_{\alpha}] \delta g_{\alpha} \\
& +[A B [\delta_F(\tilde{Q}_{\beta} - Q_{\beta}) + (\tilde{Q}_{\beta}^b \\
& - Q_{\beta}^b) + (\tilde{Q}_{\alpha}^c - Q_{\alpha}^c)] \\
& -\delta_T \frac{4}{3h^2} [(A P_{\beta\beta})_{,\beta} - P_{\alpha\alpha} A_{,\beta} + (B P_{\alpha\beta})_{,\alpha} \\
& +P_{\beta\alpha} B_{,\alpha} - 3 A B T_{\beta}] \delta g_{\beta} \} d\alpha d\beta \} \\
& +\int_{\Gamma} \{ (N_{\alpha\nu} - R_{\alpha}^{-1} M_{\alpha\nu}) \delta u^{\circ} \\
& +(N_{\beta\nu} - R_{\beta}^{-1} M_{\beta\nu}) \delta v^{\circ} + (V_n + M_{\nu\tau,\tau}) \delta w^{\circ} \\
& -(M_{\nu\tau}) \delta w^{\circ}_{,\tau} \\
& +(\delta_F M_{\alpha\nu} + M_{\alpha\nu}^a + M_{\beta\nu}^d - \frac{4}{3h^2} \delta_T P_{\alpha\nu}) \delta g_{\alpha} \\
& +(\delta_F M_{\beta\nu} + M_{\beta\nu}^b + M_{\alpha\nu}^c - \frac{4}{3h^2} \delta_T P_{\beta\nu}) \delta g_{\beta} \} d\Gamma \\
& -M_{\nu\tau} \delta w^{\circ} |_{\Gamma_p}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Per ciò che riguarda gli integrali di contorno, osservando la Figura 4.3 si ottiene che:

$$d\alpha = d\Gamma \frac{\nu_{\beta}}{A} \quad d\beta = d\Gamma \frac{\nu_{\alpha}}{B}$$

in cui $\vec{\nu}$ è il versore normale alla curva Γ , contorno della superficie Ω , individuata dall'intersezione del bordo laterale del guscio con la sua superficie di riferimento, che definisce insieme a $\vec{\tau}$ e a \vec{n} una terna destrorsa ortogonale. Le relazioni sopra scritte sono state utilizzate nello sviluppo analitico della

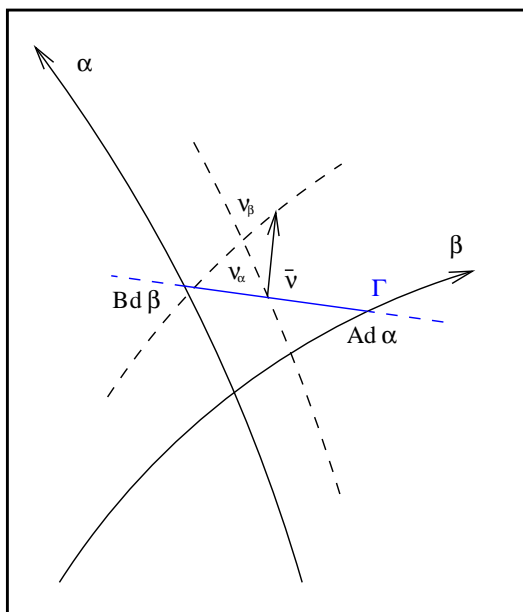


Figura 4.3. Elemento del contorno Γ .

4.31 insieme a:

$$\begin{aligned}
 N_{\alpha\nu} &= N_{\alpha\nu\alpha} + N_{\alpha\beta\nu\beta} & N_{\beta\nu} &= N_{\beta\nu\beta} + N_{\alpha\beta\nu\alpha} \\
 M_{\alpha\nu} &= M_{\alpha\nu\alpha} + M_{\alpha\beta\nu\beta} & M_{\beta\nu} &= M_{\beta\nu\beta} + M_{\alpha\beta\nu\alpha} \\
 M_{\nu} &= M_{\beta\nu\nu\beta} + M_{\alpha\nu\nu\alpha} & M_{\nu\tau} &= -M_{\alpha\nu\nu\beta} + M_{\beta\nu\nu\alpha} \\
 V_n &= Q_{\alpha\nu\alpha} + Q_{\beta\nu\beta}
 \end{aligned}$$

a:

$$\langle \cdot \rangle = \sum_{s=1}^N \int_{\zeta_{s-1}}^{\zeta_s} (\cdot) d\zeta$$

$$A^{-1}\partial_{\alpha} = \nu_{\alpha}\partial_{\nu} - \nu_{\beta}\partial_{\tau} \quad B^{-1}\partial_{\beta} = \nu_{\beta}\partial_{\nu} + \nu_{\alpha}\partial_{\tau}$$

ed alla formula di integrazione per parti di Gauss:

$$\int_x \int_y (\dots) \delta(\cdot)_{,x} dx dy = \int_y (\dots) \delta(\cdot) dy - \int_x \int_y (\dots)_{,x} \delta(\cdot) dx dy$$

Si riportano inoltre di seguito le espressioni delle forze e momenti risultanti per unità di lunghezza che sono stati introdotti:

$$(N_{\alpha\alpha}, N_{\alpha\beta}, Q_{\alpha}, M_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\beta}, T_{\alpha}, P_{\alpha\alpha}, P_{\alpha\beta}) = B^{-1} \langle (\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\zeta}, \zeta\sigma_{\alpha\alpha}, \zeta^2\sigma_{\alpha\zeta}, \zeta^3\sigma_{\alpha\zeta}, \zeta^3\sigma_{\alpha\beta}) H_{\beta} \rangle \quad (4.32)$$

$$(N_{\beta\beta}, N_{\beta\alpha}, Q_{\beta}, M_{\beta\beta}, M_{\beta\alpha}, T_{\beta}, P_{\beta\beta}, P_{\beta\alpha}) = A^{-1} \langle (\sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\beta\alpha}, \sigma_{\beta\zeta}, \zeta\sigma_{\beta\beta}, \zeta^2\sigma_{\beta\zeta}, \zeta^3\sigma_{\beta\zeta}, \zeta^3\sigma_{\beta\alpha}) H_{\alpha} \rangle \quad (4.33)$$

$$A B \tilde{Q}_{\alpha} = (B M_{\alpha\alpha})_{,ag} + (A M_{\beta\alpha})_{,bg} + A_{,\beta} M_{\alpha\beta} - B_{,\alpha} M_{\beta\beta} \quad (4.34)$$

$$A B \tilde{Q}_{\beta} = (A M_{\beta\beta})_{,bg} + (B M_{\alpha\beta})_{,ag} + B_{,\alpha} M_{\beta\alpha} - A_{,\beta} M_{\alpha\alpha} \quad (4.35)$$

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha\alpha}^a & M_{\alpha\alpha}^b & M_{\alpha\alpha}^c & M_{\alpha\alpha}^d \\ M_{\alpha\beta}^a & M_{\alpha\beta}^b & M_{\alpha\beta}^c & M_{\alpha\beta}^d \end{bmatrix} = B^{-1} \langle H_{\beta} \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha\alpha} \\ \sigma_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \sum_{k=1}^{s-1} [a_k \ b_k \ c_k \ d_k] (\zeta - \zeta_k) \rangle \quad (4.36)$$

$$\begin{bmatrix} M_{\beta\beta}^a & M_{\beta\beta}^b & M_{\beta\beta}^c & M_{\beta\beta}^d \\ M_{\beta\alpha}^a & M_{\beta\alpha}^b & M_{\beta\alpha}^c & M_{\beta\alpha}^d \end{bmatrix} = A^{-1} \langle H_{\alpha} \begin{bmatrix} \sigma_{\beta\beta} \\ \sigma_{\beta\alpha} \end{bmatrix} \sum_{k=1}^{s-1} [a_k \ b_k \ c_k \ d_k] (\zeta - \zeta_k) \rangle \quad (4.37)$$

$$(\tilde{Q}_{\alpha}^a, \tilde{Q}_{\alpha}^c) = B^{-1} \langle H_{\beta} \sigma_{\alpha\zeta} \sum_{k=1}^{s-1} (a_k, c_k) (1 - R_{\alpha}^{-1} \zeta_k) \rangle \quad (4.38)$$

$$(\tilde{Q}_{\beta}^b, \tilde{Q}_{\beta}^d) = A^{-1} \langle H_{\alpha} \sigma_{\beta\zeta} \sum_{k=1}^{s-1} (b_k, d_k) (1 - R_{\beta}^{-1} \zeta_k) \rangle \quad (4.39)$$

4.4.2 Lavoro virtuale delle forze esterne.

Sia $\Omega_p^e(s)$ la porzione della superficie di contorno $\Omega^e(s)$ dello strato s-esimo sulla quale vengono assegnati i carichi per unità di superficie $p_\alpha(s)$, $p_\beta(s)$, $p_\zeta(s)$ e siano inoltre $p_\zeta^b = p_\zeta(\alpha, \beta, -h/2)$, e $p_\zeta^t = p_\zeta(\alpha, \beta, +h/2)$, i carichi normali per unità di superficie assegnati in corrispondenza delle superfici inferiore e superiore del guscio.

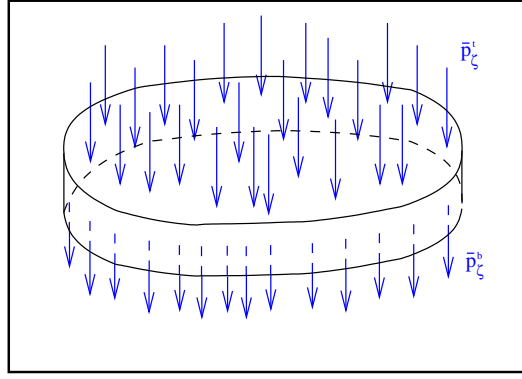


Figura 4.4. Carichi esterni agenti sulla superficie del guscio.

Il calcolo del lavoro virtuale fatto da un tale sistema di carichi in corrispondenza di un dato sistema di spostamenti virtuali risulta avere la seguente espressione finale:

$$\begin{aligned}
 \delta L^e = & \int_\alpha \int_\beta q_\zeta \delta w^o A B d\alpha d\beta \\
 & + \int_{\Gamma_p} [(\bar{N}_{\alpha\nu} - R_\alpha^{-1} \bar{M}_{\alpha\nu}) \delta u^o + (\bar{N}_{\beta\nu} - R_\beta^{-1} \bar{M}_{\beta\nu}) \delta v^o \\
 & + (\bar{V}_n + \bar{M}_{\nu\tau, \tau}) \delta w_{,\nu}^o \\
 & + (\delta_F \bar{M}_{\alpha\nu} - \delta_T \frac{4}{3h^2} \bar{P}_{\alpha\nu} + \bar{M}_{\alpha\nu}^a + \bar{M}_{\beta\nu}^d) \delta g_\alpha \\
 & + (\delta_F \bar{M}_{\beta\nu} - \delta_T \frac{4}{3h^2} \bar{P}_{\beta\nu} + \bar{M}_{\beta\nu}^b + \bar{M}_{\alpha\nu}^b) \delta g_\beta] d\Gamma \\
 & - \bar{M}_{\nu\tau} \delta w^o |_{\Gamma_p}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

nella quale sono stati introdotte le seguenti espressioni delle risultenti e dei momenti risultanti delle forze esterne:

$$q_\zeta = \left(1 - \frac{h}{2R_\alpha}\right) \left(1 - \frac{h}{2R_\beta}\right) p_\zeta^t + \left(1 + \frac{h}{2R_\alpha}\right) \left(1 + \frac{h}{2R_\beta}\right) p_\zeta^b \quad (4.41)$$

$$(\bar{N}_{\alpha\nu}, \bar{N}_{\beta\nu}, \bar{V}_n) = \langle H(\zeta)[p_\alpha(s), p_\beta(s), p_\zeta(s)] \rangle \quad (4.42)$$

$$(\bar{M}_{\alpha\nu}, \bar{M}_{\beta\nu}) = \langle \zeta H(\zeta)[p_\alpha(s), p_\beta(s)] \rangle \quad (4.43)$$

$$(\bar{P}_{\alpha\nu}, \bar{P}_{\beta\nu}) = \langle \zeta^3 H(\zeta)[p_\alpha(s), p_\beta(s)] \rangle \quad (4.44)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{\alpha\nu}^a \\ \bar{M}_{\alpha\nu}^c \end{bmatrix} = \langle p_\alpha(s) H(\zeta) \sum_{k=1}^{s-1} \begin{bmatrix} a_k \\ c_k \end{bmatrix} (\zeta - \zeta_k) \rangle \quad (4.45)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{\beta\nu}^b \\ \bar{M}_{\beta\nu}^d \end{bmatrix} = \langle p_\beta(s) H(\zeta) \sum_{k=1}^{s-1} \begin{bmatrix} b_k \\ d_k \end{bmatrix} (\zeta - \zeta_k) \rangle \quad (4.46)$$

4.4.3 Lavoro virtuale delle forze d'inerzia.

L'espressione del lavoro virtuale delle forze d'inerzia risulta essere:

$$\begin{aligned} \delta L^{in} = & -\int_\alpha \int_\beta \{ AB({}_\alpha^o \mathcal{M} \ddot{u}^o + {}_\alpha^{13} \mathcal{M}^a \ddot{g}_\alpha + \alpha \text{cal} M_1^c \ddot{g}_\beta - \alpha \mathcal{M}_1 A^{-1} \ddot{w}_{,\alpha}^o) \delta u^o \\ & + AB({}_\beta^o \mathcal{M} \ddot{v}^o + {}_\beta^{13} \mathcal{M}^b \ddot{g}_\beta + \beta \text{cal} M_1^d \ddot{g}_\alpha - \beta \mathcal{M}_1 B^{-1} \ddot{w}_{,\beta}^o) \delta v^o \\ & + [AB m_o \ddot{w}^o + (\alpha \mathcal{M}_1 B \ddot{u}^o + B m_{24}^a \ddot{g}_\alpha + B m_2^c \ddot{g}_\beta - A^{-1} B m_2 \ddot{w}_{,\alpha}^o), \alpha \\ & + (\beta \mathcal{M}_1 A \ddot{v}^o + A m_2^d \ddot{g}_\alpha + A m_{24}^b \ddot{g}_\beta - AB^{-1} m_2 \ddot{w}_{,\beta}^o), \beta] \delta w^o \\ & + [{}_\alpha^{13} \mathcal{M}^a \ddot{u}^o + \beta \mathcal{M}_1^d \ddot{v}^o + (\delta_F m_{24}^a - \delta_T \frac{4}{3h^2} m_{46}^a + m_{24}^{aa} + m_2^{dd}) \ddot{g}_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(m_{24}^{ac} + m_{24}^{bd})\ddot{g}_\beta - A^{-1}m_{24}^a\ddot{w}_{,\alpha}^o - B^{-1}m_2^d\ddot{w}_{,\beta}^o]\delta g_\alpha \\
& +[\beta^3\mathcal{M}^b\ddot{v}^o + \alpha\mathcal{M}_1^c\ddot{u}^o + (\delta_F m_{24}^b - \delta_T \frac{4}{3h^2}m_{46}^b + m_{24}^{bb} + m_2^{cc})\ddot{g}_\beta \\
& +(m_{24}^{bd} + m_{24}^{ac})\ddot{g}_\alpha \\
& - B^{-1}m_{24}^b\ddot{w}_{,\beta}^o - A^{-1}m_2^c\ddot{w}_{,\alpha}^o]\delta g_\beta\}d\alpha d\beta \\
& + \int_\Gamma [\nu_\alpha(\alpha\mathcal{M}_1\ddot{u}^o + m_{24}^a\ddot{g}_\alpha + m_2^c\ddot{g}_\beta - A^{-1}m_2\ddot{w}_{,\alpha}^o) \\
& + \nu_\beta(\beta\mathcal{M}_1\ddot{v}^o + m_{24}^b\ddot{g}_\beta + m_2^d\ddot{g}_\alpha - B^{-1}m_2\ddot{w}_{,\beta}^o)\delta w^o]d\Gamma \quad (4.47)
\end{aligned}$$

in cui si sono introdotte le seguenti risultanti d'inerzia ($i, j = 0, \dots, 6$ e $\delta, \gamma = a, b, c, d$):

$$m_i = (AB)^{-1} \langle \zeta^i \rho(s) H_\alpha H_\beta \rangle \quad (4.48)$$

$$m_i^\delta = (AB)^{-1} \langle \rho(s) H_\alpha H_\beta \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k \zeta^{i-1} (\zeta - \zeta_k) \rangle \quad (4.49)$$

$$m_i^{\delta\gamma} = (AB)^{-1} \langle \rho(s) H_\alpha H_\beta \sum_{k=1}^{s-1} \delta_k (\zeta - \zeta_k) \sum_{r=1}^{s-1} \gamma_r (\zeta - \zeta_r) \rangle \quad (4.50)$$

$$m_{ij}^\delta = m_{ij} + m_i^\delta \quad (4.51)$$

Le espressioni per $m_{ij}^{\delta\gamma}$ si ottengono direttamente da quelle di m_{ij}^δ aggiungendo semplicemente l'apice γ alle quantità che in essa compaiono.

$$(\alpha\mathcal{M}_i) = m_i - R_\alpha^{-1}m_{i+1} \quad (4.52)$$

$$(\alpha\mathcal{M}_{ij}) = m_{ij} - R_\alpha^{-1}m_{(i+1)(j+1)} \quad (4.53)$$

$$({}^i_\alpha\mathcal{M}) = (\alpha\mathcal{M}_i) - R_\alpha^{-1}(\alpha\mathcal{M}^{i+1}) \quad (4.54)$$

$$({}^{ij}_\alpha\mathcal{M}) = (\alpha\mathcal{M}_i)\delta_F - \delta_T \frac{4}{3h^2}(\alpha\mathcal{M}_j) \quad (4.55)$$

$$(\alpha\mathcal{M}_i^a) = m_i^a - R_\alpha^{-1}m_{i+1}^a \quad (4.56)$$

$$(\alpha\mathcal{M}_{ij}^a) = m_{ij}^a - R_\alpha^{-1}m_{(i+1)(j+1)}^a \quad (4.57)$$

$$({}^{ij}_\alpha\mathcal{M}^a) = ({}^{ij}_\alpha\mathcal{M}) + (\alpha\mathcal{M}_i^a) \quad (4.58)$$

Analoghe espressioni valgono per $(\beta\mathcal{M})_i, \dots, ({}^{ij}_\beta\mathcal{M}^b)$.

4.4.4 Equazioni del moto e condizioni al contorno.

Le espressioni dei tre contributi riportate nei paragrafi precedenti possono ora essere sostituite nel principio dei lavori virtuali. Dato che il campo degli spostamenti virtuali può essere assegnato in maniera del tutto arbitraria, si può pensare di assegnarne uno che abbia la particolarità di annullarsi sul contorno del guscio considerato. Così facendo vengono ad annullarsi i contributi di contorno che compaiono nell'equazione dei lavori virtuali. Le equazioni di campo si possono a questo punto ottenere considerando cinque campi di spostamenti virtuali, che rispettino la caratteristica sopra richiesta, caratterizzati ciascuno dall'aver una sola coordinata generalizzata non nulla. Procedendo in questo modo si ottengono le cinque equazioni di equilibrio dinamico del guscio. Al fine di ottenere le condizioni al contorno, invece, si assegna un campo di spostamenti virtuali che abbia la caratteristica di annullarsi ovunque tranne che sul contorno. A questo punto, indicando con Γ_p la porzione di contorno sulla quale sono assegnati i carichi, con Γ_u la porzione di contorno sulla quale sono assegnate le condizioni sugli spostamenti, e osservando che su quest'ultima gli spostamenti virtuali dovranno necessariamente essere nulli, si possono ricavare facilmente le condizioni al contorno geometriche su Γ_u e naturali su Γ_p . Le equazioni di equilibrio in termini di forze e momenti risultanti risultano quindi essere:

$$(BN_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + (AN_{\beta\alpha})_{,\beta} + A_{,\beta}N_{\alpha\beta} - N_{\beta\beta}B_{,\alpha} - ABR_{\alpha}^{-1}\tilde{Q}_{\alpha} = AB({}_{\alpha}^{\circ}\mathcal{M}\ddot{u}^{\circ} + {}_{\alpha}^{13}\mathcal{M}^a\ddot{g}_{\alpha} + {}_{\alpha}\mathcal{M}_1^c\ddot{g}_{\beta} - {}_{\alpha}\mathcal{M}_1A^{-1}\ddot{w}_{,\alpha}^{\circ}) \quad (4.59)$$

$$(AN_{\beta\beta})_{,\beta} + (BN_{\alpha\beta})_{,\alpha} + B_{,\alpha}N_{\beta\alpha} - N_{\alpha\alpha}A_{,\beta} - ABR_{\beta}^{-1}\tilde{Q}_{\beta} = AB({}_{\beta}^{\circ}\mathcal{M}\ddot{v}^{\circ} + {}_{\beta}^{13}\mathcal{M}^b\ddot{g}_{\beta} + {}_{\beta}\mathcal{M}_1^d\ddot{g}_{\alpha} - {}_{\beta}\mathcal{M}_1B^{-1}\ddot{w}_{,\beta}^{\circ}) \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned}
 (B\tilde{Q}_\alpha)_{,\alpha} + (A\tilde{Q}_\beta)_{,\beta} + AB(N_{\alpha\alpha}R_\alpha^{-1} + N_{\beta\beta}R_\beta^{-1}) + ABq_\zeta = \\
 ABm^o\ddot{w}^o + (\alpha\mathcal{M}_1B\ddot{u}^o + m_{24}^aB\ddot{g}_\alpha + m_c^2B\ddot{g}_\beta - m_2BA^{-1}\ddot{w}_{,\alpha}^o)_{,\alpha} \\
 + (\beta\mathcal{M}_1A\ddot{v}^o + m_{24}^bA\ddot{g}_\beta + m_d^2A\ddot{g}_\alpha - m_2AB^{-1}\ddot{w}_{,\beta}^o)_{,\beta} \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AB[\delta_F(\tilde{Q}_\alpha - Q_\alpha) + (\tilde{Q}_\alpha^a - Q_\alpha^a) + (\tilde{Q}_\beta^d - Q_\beta^d)] \\
 -\delta_T\frac{4}{3h^2}[(BP_{\alpha\alpha})_{,\alpha} - P_{\beta\beta}B_{,\alpha} + (P_{\beta\alpha}A)_{,\beta} + P_{\alpha\beta}A_{,\beta} - 3ABT_\alpha] = \\
 AB[\alpha^3\mathcal{M}^a\ddot{u}^o + (\beta\mathcal{M}_1^d)\ddot{v}^o + (\delta_Fm_{24}^a - \delta_T\frac{4}{3h^2}m_{46}^a + m_{24}^{aa} + m_2^{dd})\ddot{g}_\alpha \\
 + (m_{24}^{ca} + m_{24}^{db})\ddot{g}_\beta - m_{24}^aA^{-1}\ddot{w}_{,\alpha}^o - m_2^dB^{-1}\ddot{w}_{,\beta}^o] \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AB[\delta_F(\tilde{Q}_\beta - Q_\beta) + (\tilde{Q}_\beta^b - Q_\beta^b) + (\tilde{Q}_\alpha^c - Q_\alpha^c)] \\
 -\delta_T\frac{4}{3h^2}[(AP_{\beta\beta})_{,\beta} - P_{\alpha\alpha}A_{,\beta} + (P_{\alpha\beta}B)_{,\alpha} + P_{\beta\alpha}B_{,\alpha} - 3ABT_\beta] = \\
 AB[\beta^3\mathcal{M}^b\ddot{v}^o + (\alpha\mathcal{M}_1^c)\ddot{u}^o + (\delta_Fm_{24}^b - \delta_T\frac{4}{3h^2}m_{46}^b + m_{24}^{bb} + m_2^{cc})\ddot{g}_\beta \\
 + (m_{24}^{ca} + m_{24}^{db})\ddot{g}_\alpha - m_{24}^bB^{-1}\ddot{w}_{,\beta}^o - m_2^cA^{-1}\ddot{w}_{,\alpha}^o] \quad (4.63)
 \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno geometriche e naturali invece sono:

Geometriche su Γ_u	Naturali su Γ_p
$N_{\alpha\nu} - R_\alpha^{-1}M_{\alpha\nu} = \bar{N}_{\alpha\nu} - R_\alpha^{-1}\bar{M}_{\alpha\nu}$	$u^o = \bar{u}^o$
$N_{\beta\nu} - R_\beta^{-1}M_{\beta\nu} = \bar{N}_{\beta\nu} - R_\beta^{-1}\bar{M}_{\beta\nu}$	$v^o = \bar{v}^o$
$V_n + M_{\nu\tau,\tau} = \bar{V}_n + \bar{M}_{\nu\tau,\tau}$	
$+[(m_1 - R_\alpha^{-1}m_2)\ddot{u}^o + m_2^c\ddot{g}_\beta + m_{24}^a\ddot{g}_\alpha$	
$-A^{-1}m_2\ddot{w}_{,\alpha}^o]_{,\nu\alpha}$	
$+[(m_1 - R_\beta^{-1}m_2)\ddot{v}^o + m_2^d\ddot{g}_\alpha + m_{24}^b\ddot{g}_\beta$	
$-B^{-1}m_2\ddot{w}_{,\beta}^o]_{,\nu\beta}$	$w^o = \bar{w}^o$
$M_{\alpha\nu}^* - \delta_T\frac{4}{3h^2}P_{\alpha\nu} = \bar{M}_{\alpha\nu}^* - \delta_T\frac{4}{3h^2}\bar{P}_{\alpha\nu}$	$g_\alpha = \bar{g}_\alpha$
$M_{\beta\nu}^* - \delta_T\frac{4}{3h^2}P_{\beta\nu} = \bar{M}_{\beta\nu}^* - \delta_T\frac{4}{3h^2}\bar{P}_{\beta\nu}$	$g_\beta = \bar{g}_\beta$

nelle quali i simboli asteriscati sono:

$$M_{\alpha\nu}^* = \delta_F M_{\alpha\nu} + M_{\alpha\nu}^a + M_{\beta\nu}^d$$

$$M_{\beta\nu}^* = \delta_F M_{\beta\nu} + M_{\beta\nu}^b + M_{\alpha\nu}^c$$

4.5 Risultanti di tensione.

Osservando le espressioni delle equazioni di equilibrio e delle condizioni al contorno, si nota subito come le grandezze incognite in esse contenute siano ben più numerose di cinque, cioè quante sono le equazioni. Compaiono infatti sia i cinque spostamenti generalizzati, o gradi di libertà del sistema u^o , v^o , w^o , g_α , g_α che sono le effettive incognite, sia le numerose risultanti di tensione definite in precedenza. È possibile esplicitare le equazioni in termini dei cinque spostamenti generalizzati, esprimendo le risultanti di tensione in funzione di questi ultimi. Infatti le tensioni contenute nelle definizioni delle risultanti possono essere messe in relazione con le deformazioni attraverso le equazioni costitutive delle singole lamine. A loro volta le deformazioni sono legate agli spostamenti generalizzati attraverso le relazioni già mostrate. Eseguendo queste sostituzioni ed eseguendo l'integrazione in z si ottengono le equazioni di equilibrio in termini di spostamenti generalizzati.

Le espressioni delle risultanti di tensione in termini di spostamenti generalizzati, ricordando le notazioni compatte adottate in 4.3, assumono la seguente forma:

$$N_{\alpha\alpha} = \sum_{s=1}^N \{ [\varepsilon_{\alpha\alpha}^o I_{\beta\alpha}^o + \varepsilon_{\alpha\alpha}^1 I_{\beta\alpha}^1 + \varepsilon_{\alpha\alpha}^3 I_{\beta\alpha}^3 + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{\alpha\alpha}^k (I_{\beta\alpha}^1 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^o) Y_k] A^{-1} \bar{Q}_{11}$$

$$\begin{aligned}
 & +[\varepsilon_{\beta\beta}^o h^1 + \varepsilon_{\beta\beta}^1 h^2 + \varepsilon_{\beta\beta}^3 h^4 \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{\beta\beta}^k (h^2 - \zeta_k h^1) Y_k] B^{-1} \overline{Q}_{12} \\
 & +[\varepsilon_{\alpha\beta}^{oa} h^1 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1a} h^2 \\
 & + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3a} h^4 + A^{-1} B (\varepsilon_{\alpha\beta}^{ob} I_{\beta\alpha}^o + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1b} I_{\beta\alpha}^1 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3b} I_{\beta\alpha}^3) \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} [\varepsilon_{\alpha\beta}^{ka} (h^2 - \zeta_k h^1) \\
 & + \varepsilon_{\alpha\beta}^{kb} (I_{\beta\alpha}^1 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^o) A^{-1} B] Y_k] B^{-1} \overline{Q}_{16} \}_s
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
 N_{\alpha\beta} = & \\
 & \sum_{s=1}^N \{ [\varepsilon_{\alpha\alpha}^o I_{\beta\alpha}^o + \varepsilon_{\alpha\alpha}^1 I_{\beta\alpha}^1 + \varepsilon_{\alpha\alpha}^3 I_{\beta\alpha}^3 \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{\alpha\alpha}^k (I_{\beta\alpha}^1 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^o) Y_k] A^{-1} \overline{Q}_{16} \\
 & + [\varepsilon_{\beta\beta}^o h^1 + \varepsilon_{\beta\beta}^1 h^2 + \varepsilon_{\beta\beta}^3 h^4 \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{\beta\beta}^k (h^2 - \zeta_k h^1) Y_k] B^{-1} \overline{Q}_{26} + [\varepsilon_{\alpha\beta}^{oa} h^1 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1a} h^2 \\
 & + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3a} h^4 + A^{-1} B (\varepsilon_{\alpha\beta}^{ob} I_{\beta\alpha}^o + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1b} I_{\beta\alpha}^1 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3b} I_{\beta\alpha}^3) \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} [\varepsilon_{\alpha\beta}^{ka} (h^2 - \zeta_k h^1) \\
 & + \varepsilon_{\alpha\beta}^{kb} (I_{\beta\alpha}^1 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^o) A^{-1} B] Y_k] B^{-1} \overline{Q}_{66} \}_s
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{\alpha} = & \\
 & \sum_{s=1}^N \{ [\varepsilon_{\alpha\zeta}^o I_{\beta\alpha}^o + \varepsilon_{\alpha\zeta}^2 I_{\beta\alpha}^2 \\
 & + A \sum_{k=1}^{N-1} \theta_k (1 - R_{\alpha}^{-1} \zeta_k) I_{\beta\alpha}^o Y_k] A^{-1} \overline{Q}_{44} \\
 & + [\varepsilon_{\beta\zeta}^o h^1 + \varepsilon_{\beta\zeta}^2 h^3 \\
 & + B \sum_{k=1}^{N-1} \psi_k (1 - R_{\beta}^{-1} \zeta_k) h^1 Y_k] B^{-1} \overline{Q}_{45} \}_s
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\alpha} = & \\
 & \sum_{s=1}^N \{ [\varepsilon_{\alpha\alpha}^o I_{\beta\alpha}^1 + \varepsilon_{\alpha\alpha}^1 I_{\beta\alpha}^2 + \varepsilon_{\alpha\alpha}^3 I_{\beta\alpha}^4 \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{\alpha\alpha}^k (I_{\beta\alpha}^2 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^1) Y_k] A^{-1} \overline{Q}_{11} \\
 & + [\varepsilon_{\beta\beta}^o h^2 + \varepsilon_{\beta\beta}^1 h^3 + \varepsilon_{\beta\beta}^3 h^5 \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{\beta\beta}^k (h^3 - \zeta_k h^2) Y_k] B^{-1} \overline{Q}_{12} \\
 & + [\varepsilon_{\alpha\beta}^{oa} h^2 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1a} h^3 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3a} h^5 + A^{-1} B (\varepsilon_{\alpha\beta}^{ob} I_{\beta\alpha}^1 \\
 & + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1b} I_{\beta\alpha}^2 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3b} I_{\beta\alpha}^4) \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} [\varepsilon_{\alpha\beta}^{ka} (h^3 - \zeta_k h^2) \\
 & + \varepsilon_{\alpha\beta}^{kb} (I_{\beta\alpha}^2 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^1) A^{-1} B] Y_k] B^{-1} \overline{Q}_{16} \}_s \quad (4.67)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta} = & \\
 & \sum_{s=1}^N \{ [\varepsilon_{\alpha\alpha}^o I_{\beta\alpha}^1 + \varepsilon_{\alpha\alpha}^1 I_{\beta\alpha}^2 + \varepsilon_{\alpha\alpha}^3 I_{\beta\alpha}^4 \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{\alpha\alpha}^k (I_{\beta\alpha}^2 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^1) Y_k] A^{-1} \overline{Q}_{16} \\
 & + [\varepsilon_{\beta\beta}^o h^2 + \varepsilon_{\beta\beta}^1 h^3 + \varepsilon_{\beta\beta}^3 h^5 \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{\beta\beta}^k (h^3 - \zeta_k h^2) Y_k] B^{-1} \overline{Q}_{26} \\
 & + [\varepsilon_{\alpha\beta}^{oa} h^2 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1a} h^3 \\
 & + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3a} h^5 + A^{-1} B (\varepsilon_{\alpha\beta}^{ob} I_{\beta\alpha}^1 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1b} I_{\beta\alpha}^2 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3b} I_{\beta\alpha}^4) \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} [\varepsilon_{\alpha\beta}^{ka} (h^3 - \zeta_k h^2) \\
 & + \varepsilon_{\alpha\beta}^{kb} (I_{\beta\alpha}^3 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^1) A^{-1} B] Y_k] B^{-1} \overline{Q}_{66} \}_s \quad (4.68)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_\alpha = & \\
 & \sum_{s=1}^N \{ [\varepsilon_{\alpha\zeta}^o I_{\beta\alpha}^2 + \varepsilon_{\alpha\zeta}^2 I_{\beta\alpha}^4 \\
 & + A \sum_{k=1}^{N-1} \theta_k (1 - R_\alpha^{-1} \zeta_k) I_{\beta\alpha}^2 Y_k] A^{-1} \overline{Q}_{44} \\
 & + [\varepsilon_{\beta\zeta}^o h^3 + \varepsilon_{\beta\zeta}^2 h^5 \\
 & + B \sum_{k=1}^{N-1} \psi_k (1 - R_\beta^{-1} \zeta_k) h^3 Y_k] B^{-1} \overline{Q}_{45} \}_s \quad (4.69)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha\alpha} = & \\
 & \sum_{s=1}^N \{ [\varepsilon_{\alpha\alpha}^o I_{\beta\alpha}^3 + \varepsilon_{\alpha\alpha}^1 I_{\beta\alpha}^4 \\
 & + \varepsilon_{\alpha\alpha}^3 I_{\beta\alpha}^6 \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{\alpha\alpha}^k (I_{\beta\alpha}^4 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^3) Y_k] A^{-1} \overline{Q}_{11} \\
 & + [\varepsilon_{\beta\beta}^o h^4 + \varepsilon_{\beta\beta}^1 h^5 + \varepsilon_{\beta\beta}^3 h^7 \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{\beta\beta}^k (h^5 - \zeta_k h^4) Y_k] B^{-1} \overline{Q}_{12} \\
 & + [\varepsilon_{\alpha\beta}^{oa} h^4 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1a} h^5 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3a} h^7 + A^{-1} B (\varepsilon_{\alpha\beta}^{ob} I_{\beta\alpha}^3 \\
 & + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1b} I_{\beta\alpha}^4 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3b} I_{\beta\alpha}^6) \\
 & + \sum_{k=1}^{N-1} [\varepsilon_{\alpha\beta}^{ka} (h^5 - \zeta_k h^4) \\
 & + \varepsilon_{\alpha\beta}^{kb} (I_{\beta\alpha}^4 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^3) A^{-1} B] Y_k] B^{-1} \overline{Q}_{16} \}_s \quad (4.70)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha\beta} = & \\
 & \sum_{s=1}^N \{ [\varepsilon_{\alpha\alpha}^o I_{\beta\alpha}^3 + \varepsilon_{\alpha\alpha}^1 I_{\beta\alpha}^4 + \varepsilon_{\alpha\alpha}^3 I_{\beta\alpha}^6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{\alpha\alpha}^k (I_{\beta\alpha}^4 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^3) Y_k] A^{-1} \overline{Q}_{16} \\
& + [\varepsilon_{\beta\beta}^0 h^4 + \varepsilon_{\beta\beta}^1 h^5 + \varepsilon_{\beta\beta}^3 h^7 \\
& + \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon_{\beta\beta}^k (h^5 - \zeta_k h^4) Y_k] B^{-1} \overline{Q}_{26} \\
& + [\varepsilon_{\alpha\beta}^{0a} h^4 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1a} h^5 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3a} h^7 + A^{-1} B (\varepsilon_{\alpha\beta}^{ob} I_{\beta\alpha}^3 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1b} I_{\beta\alpha}^4 + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3b} I_{\beta\alpha}^6) \\
& + \sum_{k=1}^{N-1} [\varepsilon_{\alpha\beta}^{ka} (h^5 - \zeta_k h^4) \\
& + \varepsilon_{\alpha\beta}^{kb} (I_{\beta\alpha}^4 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^3) A^{-1} B] Y_k] B^{-1} \overline{Q}_{66} \}_s
\end{aligned} \tag{4.71}$$

$$M_{\alpha\alpha}^j = \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^N \{ [\sum_{k=1}^{s-1} [\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 (I_{\beta\alpha}^1 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^0) \\
& + \varepsilon_{\alpha\alpha}^1 (I_{\beta\alpha}^2 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^1) + \varepsilon_{\alpha\alpha}^3 (I_{\beta\alpha}^4 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^3) \\
& + \sum_{z=1}^{N-1} \varepsilon_{\alpha\alpha}^z (I_{\beta\alpha}^2 - (\zeta_z + \zeta_k) I_{\beta\alpha}^1 \\
& + \zeta_k \zeta_z I_{\beta\alpha}^0) Y_z] j_k] A^{-1} \overline{Q}_{11} \\
& + [\sum_{k=1}^{s-1} [\varepsilon_{\beta\beta}^0 (h^2 - \zeta_k h^1) + \varepsilon_{\beta\beta}^1 (h^3 - \zeta_k h^2) \\
& + \varepsilon_{\beta\beta}^3 (h^5 - \zeta_k h^4) \\
& + \sum_{z=1}^{N-1} \varepsilon_{\beta\beta}^z (h^3 - (\zeta_z + \zeta_k) h^2 + \zeta_k \zeta_z h^1) Y_z] j_k] B^{-1} \overline{Q}_{12} \\
& + [\sum_{k=1}^{s-1} [\varepsilon_{\alpha\beta}^{0a} (h^2 - \zeta_k h^1) + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1a} (h^3 - \zeta_k h^2) + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3a} (h^5 - \zeta_k h^4) \\
& + A^{-1} B [\varepsilon_{\alpha\beta}^{ob} (I_{\beta\alpha}^1 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^0) + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1b} (I_{\beta\alpha}^2 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^1) \\
& + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3b} (I_{\beta\alpha}^4 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^3)] + \sum_{z=1}^{N-1} [\varepsilon_{\alpha\beta}^{za} [h^3 - (\zeta_k + \zeta_z) h^2 + \zeta_k \zeta_z h^1] \\
& + \varepsilon_{\alpha\beta}^{zb} [I_{\beta\alpha}^2 - (\zeta_k + \zeta_z) I_{\beta\alpha}^1 \\
& + \zeta_k \zeta_z I_{\beta\alpha}^0] A^{-1} B] Y_z] j_k] B^{-1} \overline{Q}_{16} \}_s
\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta}^j = & \\
 & \sum_{s=1}^N \{ [\sum_{k=1}^{s-1} [\varepsilon_{\alpha\alpha}^o (I_{\beta\alpha}^1 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^o)] \\
 & + \varepsilon_{\alpha\alpha}^1 (I_{\beta\alpha}^2 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^1) + \varepsilon_{\alpha\alpha}^3 (I_{\beta\alpha}^4 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^3)] \\
 & + \sum_{z=1}^{N-1} \varepsilon_{\alpha\alpha}^z (I_{\beta\alpha}^2 - (\zeta_z + \zeta_k) I_{\beta\alpha}^1 + \zeta_k \zeta_z I_{\beta\alpha}^o) Y_z] j_k] A^{-1} \overline{Q}_{16} \\
 & [\sum_{k=1}^{s-1} [\varepsilon_{\beta\beta}^o (h^2 - \zeta_k h^1) + \varepsilon_{\beta\beta}^1 (h^3 - \zeta_k h^2) \\
 & + \varepsilon_{\beta\beta}^3 (h^5 - \zeta_k h^4) \\
 & + \sum_{z=1}^{N-1} \varepsilon_{\beta\beta}^z (h^3 - (\zeta_z + \zeta_k) h^2 + \zeta_k \zeta_z h^1) Y_z] j_k] B^{-1} \overline{Q}_{26} \\
 & + [\sum_{k=1}^{s-1} [\varepsilon_{\alpha\beta}^{oa} (h^2 - \zeta_k h^1) \\
 & + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1a} (h^3 - \zeta_k h^2) \\
 & + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3a} (h^5 - \zeta_k h^4) + A^{-1} B [\varepsilon_{\alpha\beta}^{ob} (I_{\beta\alpha}^1 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^o) \\
 & + \varepsilon_{\alpha\beta}^{1b} (I_{\beta\alpha}^2 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^1) + \varepsilon_{\alpha\beta}^{3b} (I_{\beta\alpha}^4 - \zeta_k I_{\beta\alpha}^3)] \\
 & + \sum_{z=1}^{N-1} [\varepsilon_{\alpha\beta}^{za} [h^3 - (\zeta_k + \zeta_z) h^2 + \zeta_k \zeta_z h^1] \\
 & + \varepsilon_{\alpha\beta}^{zb} [I_{\beta\alpha}^2 - (\zeta_k + \zeta_z) I_{\beta\alpha}^1 \\
 & + \zeta_k \zeta_z I_{\beta\alpha}^o] A^{-1} B] Y_z] j_k] B^{-1} \overline{Q}_{66} \} s
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{\alpha}^i = & \\
 & \sum_{s=1}^N \{ [\sum_{k=1}^{s-1} [\varepsilon_{\alpha\zeta}^o I_{\beta\alpha}^o + \varepsilon_{\alpha\zeta}^2 I_{\beta\alpha}^2 \\
 & + A I_{\beta\alpha}^o \sum_{z=1}^{N-1} \theta_z (1 - R_{\alpha}^{-1} \zeta_z) Y_z] (1 - R_{\alpha}^{-1} \zeta_k) j_k] A^{-1} \overline{Q}_{44} \\
 & + [\sum_{k=1}^{s-1} [\varepsilon_{\beta\zeta}^o h^1 + \varepsilon_{\beta\zeta}^2 h^3
 \end{aligned}$$

$$+Bh^1 \sum_{z=1}^{N-1} \psi_z(1 - R_\beta^{-1}\zeta_z)Y_z](1 - R_\alpha^{-1}\zeta_k)j_k]B^{-1}\overline{Q}_{45}\}_s \quad (4.75)$$

Nelle espressioni riportate $j = a,b,c,d$ e $i = a,c$. Le altre risultanti di tensione possono essere facilmente ottenute scambiando in queste ultime il pedice α con β , e β con α , A con B e B con A , l'indice 1 con 2, 2 con 1, 4 con 5 e 5 con 4 delle rigidezze ridotte trasformate mentre $i = b,d$. Per ciò che riguarda i simboli $I_{xy_s}^n$ e h_s^n invece, si osserva che essi rappresentano degli integrali eseguiti rispetto alla variabile ζ e precisamente:

$$h_s^n = \int_{\zeta_{s-1}}^{\zeta_s} \zeta^{n-1} d\zeta = (\zeta_s^n - \zeta_{s-1}^n)/n \quad (4.76)$$

mentre, come da [5, pag.22]:

$$I_{xy_s}^n = \int_{\zeta_{s-1}}^{\zeta_s} \zeta^n \frac{1 - \zeta/R_x}{1 - \zeta/R_y} d\zeta \quad (4.77)$$

assume l'espressione:

$$\left[(-R_y)^{n+1} \Delta_n - R_x^{-1} (-R_y)^{n+2} \Delta_{n+1} \right]_{\zeta_{s-1}}^{\zeta_s}$$

con:

$$\Delta_n = \left(\sum_{i=0}^n \frac{n!(-1)^i(1 - \zeta/R_y)^{n-i}}{(n-i)!i!(n-i)} \right)$$

e:

$$\Delta_{n+1} = \left(\sum_{i=0}^{n+1} \frac{(n+1)!(-1)^i(1 - \zeta/R_y)^{n+1-i}}{(n+1-i)!i!(n+1-i)} \right)$$

che vale tranne che per $(n-i) = 0$, nel qual caso i termini in parentesi tonda assumono la forma:

$$(-1)^n \log | 1 - \zeta/R_y | \quad \text{e} \quad (-1)^{n+1} \log | 1 - \zeta/R_y |$$

Sostituendo le espressioni delle risultanti di tensione nelle equazioni di equilibrio precedentemente scritte se ne ricava la forma esplicita in termini

di spostamenti generalizzati. Essendo particolarmente complesse, e non essendo possibile trovarne la soluzione analitica nel caso più generale, non si ritiene opportuno scriverle per esteso. Ci si limita a far notare che è possibile scrivere le equazioni in termini di spostamento in forma compatta definendo opportuni operatori differenziali di tipo elastico ed inerziale. Il sistema avrebbe allora forma:

$$\begin{aligned} L_{11}(u^o) + L_{12}(v^o) + L_{13}(w^o) + L_{14}(g\alpha) + L_{15}(g\beta) + \bar{P}_1 = \\ M_{11}(u^o) + M_{12}(v^o) + M_{13}(w^o) + M_{14}(g\alpha) + M_{15}(g_{bg}) \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} L_{21}(u^o) + L_{22}(v^o) + L_{23}(w^o) + L_{24}(g\alpha) + L_{25}(g\beta) + \bar{P}_2 = \\ M_{12}(u^o) + M_{22}(v^o) + M_{23}(w^o) + M_{24}(g\alpha) + M_{25}(g_{bg}) \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} L_{31}(u^o) + L_{32}(v^o) + L_{33}(w^o) + L_{34}(g\alpha) + L_{35}(g\beta) + \bar{P}_3 = \\ M_{31}(u^o) + M_{32}(v^o) + M_{33}(w^o) + M_{34}(g\alpha) + M_{35}(g_{bg}) \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} L_{41}(u^o) + L_{42}(v^o) + L_{43}(w^o) + L_{44}(g\alpha) + L_{45}(g\beta) + \bar{P}_4 = \\ M_{41}(u^o) + M_{42}(v^o) + M_{43}(w^o) + M_{44}(g\alpha) + M_{45}(g_{bg}) \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned} L_{51}(u^o) + L_{52}(v^o) + L_{53}(w^o) + L_{54}(g\alpha) + L_{55}(g\beta) + \bar{P}_5 = \\ M_{51}(u^o) + M_{52}(v^o) + M_{53}(w^o) + M_{54}(g\alpha) + M_{55}(g_{bg}) \end{aligned} \quad (4.82)$$

in cui:

- $L_{ij}(\cdot)$ sono degli operatori elastici da applicare alle funzioni incognite contenenti le risultanti di rigidezza ed operazioni di differenziazione nelle variabili spaziali.
- $M_{ij}(\cdot)$ sono degli operatori inerziali contenenti le risultanti d'inerzia ed operazioni di differenziazione nelle variabili spaziali e temporale.
- \bar{P}_i sono elementi contenenti i termini di carico esterno.

Non ci si sofferma sulla determinazione di questi operatori che avviene esplicitando le equazioni in termini di spostamento e raccogliendo i termini contenenti le stesse variabili.

Si vuole invece osservare che, in virtù dell'introduzione dei termini I_{xy}^n , nella trattazione fin ora fatta, si è tenuto conto in maniera esatta dell'effetto della curvatura del guscio sul suo comportamento meccanico. Qualora invece sia lecita un'approssimazione del tipo:

$$H_\alpha; H_\beta = 1$$

il che equivale al considerare gusci aventi dei rapporti:

$$\zeta/R_\alpha; \zeta/R_\beta \rightarrow 0$$

le espressioni di tali integrali risulterebbero notevolmente semplificate, e come evidente effetto le risultanti di tensione di pedice ($\alpha\beta$) sarebbero uguali a quelle di pedice ($\beta\alpha$), cosa che in realta non sarebbe realizzata se l'approssimazione sopra citata non fosse lecita. In questo caso il generico termine I_{xy}^n verrebbe ad essere sostituito con:

$$I_{xy_s}^n \rightarrow h_s^{n+1}$$

e nelle espressioni delle risultanti di tensione le risultanti di rigidezza:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}, H_{ij}, S_{ij}) = \sum_{s=1}^N h_s^n \bar{Q}_{ij_s} \text{ per } n = 1, \dots, 8 \quad (4.83)$$

potrebbero essere facilmente essere inserite.

In alternativa all'ipotesi cui si è accennato ora, se ne può considerare un'altra in base alla quale le caratteristiche geometriche del guscio siano tali da giustificare lo sviluppo in serie di potenze:

$$\frac{1 - \zeta/R_x}{1 - \zeta/R_y} = 1 + R_{yx} \frac{\zeta}{R_x} + R_{yx} \frac{\zeta^2}{R_x^2} + R_{yx} \frac{\zeta^3}{R_x^3} + o\left(\frac{\zeta}{R_x}\right)^4$$

in cui si è posto:

$$\frac{R_y - R_x}{R_y} = R_{yx} \quad \text{con } x, y = \alpha, \beta \text{ e } x \neq y$$

Se una tale ipotesi risultasse accettabile, nelle risultanti di tensione si potrebbero introdurre invece le grandezze:

$$\sum_{s=1}^N I_{xy_s}^n \bar{Q}_{ij_s} = (\cdot)_{ij} + R_{xy}(\cdot)_{ij} + R_{xy}R_y^{-1}(\cdot)_{ij} + R_{xy}R_y^{-2}(\cdot)_{ij}$$

$$n = 0 \quad (\cdot)_{xy} = (A, B, D, E)_{ij}$$

$$n = 1 \quad (\cdot)_{xy} = (B, D, E, F)_{ij}$$

$$n = 2 \quad (\cdot)_{xy} = (D, E, F, G)_{ij}$$

$$n = 3 \quad (\cdot)_{xy} = (E, F, G, H)_{ij}$$

$$n = 4 \quad (\cdot)_{xy} = (F, G, H, S)_{ij}$$

$$n = 5 \quad (\cdot)_{xy} = (G, H, S, T)_{ij}$$

$$n = 6 \quad (\cdot)_{xy} = (H, S, T, U)_{ij}$$

in cui le rigidezze del laminato sono al solito:

$$(A, B, D, E, F, G, H, S, T, U)_{ij} = \sum_{s=1}^N \int_{\zeta_{s-1}}^{\zeta_s} (1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5, \zeta^6, \zeta^7, \zeta^8, \zeta^9) \bar{Q}_{ij_s} d\zeta \quad i, j = 1, 2, 4, 5, 6$$

e:

$$(A, B, D, E, F, G, H)_{ij} = \sum_{s=1}^N h_s^n \bar{Q}_{ij_s} \quad n = 1, \dots, 7 \text{ e } i, j = 1, 2, 4, 5, 6$$

Una interessante disquisizione circa la diretta sostituzione dell'espressione approssimata in luogo di H_α/H_β o H_β/H_α è riportata in [17].

4.6 Particolarizzazione delle equazioni.

Dalle equazioni del moto del guscio multistrato verranno si possono ricavare come caso particolare quelle del guscio di rivoluzione, della piastra piana e della trave. Si illustrerà quindi come procedere alla particolarizzazione.

- *Guscio di rivoluzione*: le equazioni relative al guscio di rivoluzione possono essere ottenute da quelle del guscio generico ponendo semplicemente $R_x \rightarrow \infty$ con $x = \alpha$ oppure $y = \beta$, $A = 1$ oppure $B = 1$.
- *Piastra piana*: le equazioni possono essere ottenute ponendo $R_\alpha \rightarrow \infty$, $R_\beta \rightarrow \infty$, $A = 1$, $B = 1$.
- *Trave*: le equazioni relative alla trave si ottengono da quelle del guscio ponendo $R_\alpha \rightarrow \infty$, $R_\beta \rightarrow \infty$, $A = 1$, $B = 1$ e trascurando tutti i termini derivati rispetto alla variabile α (β) se β (α) individua la coordinata assiale della trave.

Si precisa che tali posizioni dovranno essere inserite non solo nelle equazioni di equilibrio, ma anche nelle condizioni al contorno e nelle risultanti di tensione.

Capitolo 5

La piezoelettricità.

5.1 Introduzione.

L'utilizzo di tecniche di controllo attivo tramite microattuatori distribuiti all'interno della struttura, esige che essi siano semplici, compatti e sufficientemente leggeri, tali cioè da non modificare in modo significativo il comportamento sia statico che dinamico della struttura quando non siano attivati. I materiali piezoelettrici, che si deformano se sottoposti ad un campo elettrico, possono essere utilizzati a tale scopo: incollando sulle superfici o inserendo all'interno della struttura piccole placche di piezoelettrico si possono indurre deformazioni locali al fine di controllare le prestazioni statiche e dinamiche. Le dimensioni particolarmente contenute di tale tipo di microattuatori permettono di utilizzarne un numero notevole senza alterare considerevolmente la massa della struttura da controllare.

I piezoelettrici sono già efficacemente impiegati in una grande varietà di rivelatori e sensori come estensimetri, trasduttori di pressione ed accelerometri ma solo da pochi anni si è presa in considerazione la possibilità di utilizzarli come attuatori.

5.2 Effetto piezoelettrico diretto e inverso.

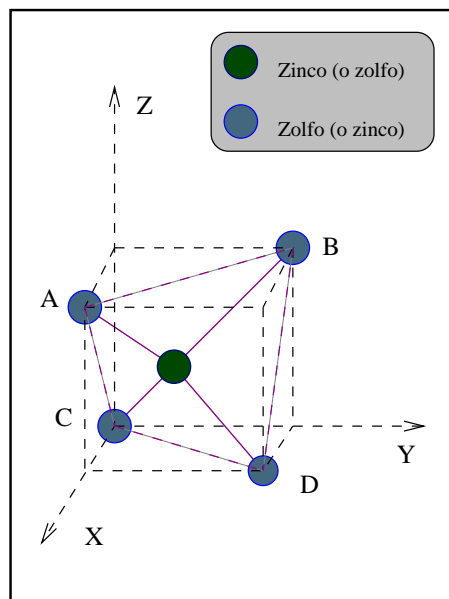
Per *piezoelettricità* si intende la capacità di alcuni materiali di presentare una polarizzazione elettrica quando ad essi sia applicato uno stato tensionale: questo fenomeno prende il nome di *effetto piezoelettrico diretto* ed è quello che viene sfruttato nell'utilizzazione del piezo come sensore. Analogamente, ponendo il materiale all'interno di un campo elettrico, si ottiene un cambiamento di forma: questo fenomeno prende il nome di *effetto piezoelettrico inverso* ed è quello che viene sfruttato nell'utilizzazione del piezo come attuatore. Questi fenomeni vennero osservati sperimentalmente dai fratelli Curie nel 1880 e sono la conseguenza della particolare struttura cristallina di questi materiali. Si rileva infatti che caratteristica comune fra i piezoelettrici è la mancanza di un centro di simmetria nella struttura cristallina. Delle 32 classi di cristalli esistenti, 21 non hanno centro di simmetria e, con l'eccezione di una, tutte queste sono piezoelettriche. Nei cristalli di minore simmetria, qualsiasi tipo di sollecitazione genera polarizzazione elettrica, mentre nei cristalli aventi simmetria maggiore solo particolari sollecitazioni possono produrre l'effetto piezoelettrico. Nei suddetti cristalli, non conduttori, la piezoelettricità viene interpretata come un'alterazione dell'equilibrio dei momenti di dipoli elettrici permanenti. Da tale alterazione dell'equilibrio deriva uno stato di polarizzazione elettrica per effetto delle sollecitazioni meccaniche e uno stato di deformazione per effetto del campo elettrico sui dipoli. Per un dato cristallo, l'asse di polarizzazione dipende dalla natura della sollecitazione. Non esiste alcuna classe di cristalli nei quali la polarizzazione piezoelettrica sia limitata ad un unico asse, ma in parecchie classi la polarizzazione è limitata ad un unico piano. L'effetto piezoelettrico inverso si determina quando un campo elettrico esterno E induce una polarizzazione \mathcal{P} in un cristallo, e questo presenta una piccola deformazione S proporzionale a \mathcal{P} . In cristalli con comportamento piezoelettrico normale, la polarizzazione

\mathcal{P} è proporzionale al campo elettrico E e di conseguenza la deformazione è proporzionale al campo E . Sovrapposta alla deformazione piezoelettrica S c'è anche una deformazione più piccola proporzionale a \mathcal{P}^ϵ , o E^2 . Questo fenomeno, presente in ogni dielettrico e indipendente dall'inversione del campo, è detto *elettrostrizione*. La deformazione elettrostrittiva è all'incirca proporzionale, oltre che al quadrato del campo, alla suscettività elettrica, alle costanti elastiche ed è piccolissima per la maggior parte dei materiali. Vista la complessità delle teorie quantitative basate sui particolari della struttura cristallina, conviene descrivere qualitativamente l'effetto piezoelettrico per le strutture più semplici.

5.3 Spiegazione qualitativa del comportamento piezoelettrico.

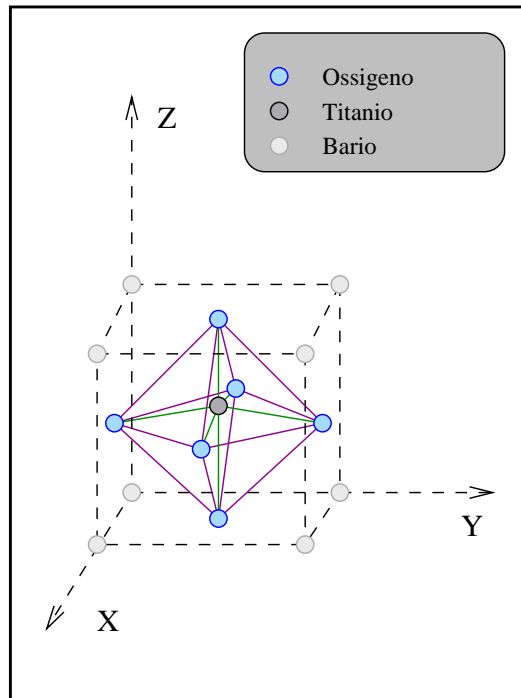
Una spiegazione semplice del comportamento piezoelettrico può essere data facendo riferimento alla cosiddetta *Teoria molecolare* e ad alcuni cristalli dalla struttura elementare. Si osservi a tal proposito la Figura 5.1.

In essa è rappresentata la cella unitaria della blenda (formula chimica ZnS) nella quale lo ione dello zinco risulta essere carico positivamente e posto al centro del tetraedro regolare $ABCD$, i cui angoli sono occupati dagli ioni di zolfo carichi negativamente. Quando questo cristallo viene assoggettato ad una tensione tagliante nel piano (x,y) , il lato AB , per esempio, si deformerà allungandosi mentre CD invece si accorcerà. La differenza di lunghezza tra AB e CD determinerà uno squilibrio tra le forze elettriche mutuamente scambiate tra gli ioni della cella a causa del quale lo ione di zinco si sposterà in una nuova posizione di equilibrio lungo l'asse z . Una tale situazione darà perciò origine alla nascita di un momento di dipolo elettrico che si sommerà a quelli delle celle adiacenti (effetto diretto).

Figura 5.1. Cella unitaria della Blenda ZnS .

Un altro semplice tipo di struttura piezoelettrica è quella del titanato di bario (formula chimica $BaTiO_3$) la cui cella unitaria è mostrata in Figura 5.2.

Lo ione di titanio, positivo, è circondato da un ottaedro quasi regolare di ioni negativi di ossigeno. Lo ione di titanio, in oltre non è al centro dell'ottaedro, ma risulta un pó spostato lungo l'asse z cosicché la struttura in esame risulta già dotata spontaneamente di un momento di dipolo pur in assenza di tensioni meccaniche applicate. Dall'osservazione della figura si intuisce che, se il cristallo fosse trazione lungo l'asse z mediante tensioni agenti sulle sue facce parallele al piano (x,y) , lo ione di titanio si allontanerebbe ulteriormente dal centro del tetraedro dando origine alla nascita di un ulteriore contributo di polarizzazione, dovuto alle tensioni meccaniche, che si sommerebbe a quella già posseduta spontaneamente dal cristallo.

Figura 5.2. Cella unitaria del Titanato di Bario $BaTiO_3$.

5.4 Relazioni matematiche della piezoelettricità.

5.4.1 La costante piezoelettrica del materiale.

Parametro significativo nella caratterizzazione dei materiali piezoelettrici è la *costante piezoelettrica del materiale* d_{kj} . Essa è la costante che lega linearmente le deformazioni prodotte al campo elettrico che si determina come conseguenza di queste. I pedici k, j sono introdotti per tener conto che nei materiali di questo tipo la deformazione indotta avviene ortogonalmente al campo elettrico che la produce.

Nella seguente tabella sono mostrate le costanti piezoelettriche dei materiali più adatti all'impiego nel controllo attivo, insieme alla *temperatura di*

Curie alla quale il materiale perde le sue caratteristiche piezoelettriche, e al massimo potenziale elettrico sopportabile E_{max} :

	PZT G-1195	PZT HST-41	PZT G-1278	PVDF
Temp. di Curie [°C]	360	270	190	100
E_{max} [V/m]	$600 \cdot 10^3$	$600 \cdot 10^3$	$600 \cdot 10^3$	$40 \cdot 10^6$
d_{kj} [m/V]	$190 \cdot 10^{-12}$	$157 \cdot 10^{-12}$	$250 \cdot 10^{-12}$	$23 \cdot 10^{-12}$

È importante sottolineare come in generale il materiale presenti costanti piezoelettriche dipendenti dalla direzione considerata ma, nel caso dei materiali di impiego comune nelle tecniche di controllo come quelli le cui caratteristiche sono riportate in tabella, si ha una *isotropia trasversale* delle proprietà piezoelettriche per cui:

$$d_{ki} = d_{kj}$$

5.4.2 Equazioni costitutive del piezoelettrico.

Si riportano qui di seguito le relazioni matematiche costitutive del materiale piezoelettrico [7] sia in termini di deformazioni che in termini di tensioni. In termini di deformazioni si ha:

$$\{\tilde{\sigma}\} = [C] \cdot \{\varepsilon\} + [e]^T \cdot \{E\} \text{ effetto inverso}$$

Questa relazione può essere interpretata considerando un cubetto elementare di materiale piezo deformato per effetto di tensioni meccaniche σ applicate sulle sue facce (primo contributo nell'equazione) e di tensioni interne indotte da un campo elettrico \vec{E} per effetto piezoelettrico inverso (secondo contributo). La deformazione del cubetto elementare può essere quindi vista come quella dovuta ad un sistema di tensioni esterne $\tilde{\sigma}$ applicate sulle sue facce somma dei due contributi prima descritti. Con $\{\varepsilon\}$ si è quindi indicato il vettore delle componenti di deformazione dovute alle tensioni meccaniche

legato al vettore $\{\sigma\}$ mediante la legge di Hooke, mentre la matrice $[e]$, di dimensioni 3×6 , ha per elementi le e_{ij} dette *coefficienti di tensione piezoelettrica*. Si osserva ancora che il secondo contributo dell'equazione può essere interpretato come uguale e contrario a quel sistema di tensioni meccaniche da applicare sulle facce del cubetto con lo scopo di annullare le deformazioni indotte per effetto piezoelettrico inverso.

Sempre in termini di deformazioni si riporta l'espressione del vettore polarizzazione:

$$\{\mathcal{P}\} = [\chi] \cdot \{E\} + [e]^T \cdot \{\varepsilon\} \text{ effetto diretto}$$

Il vettore polarizzazione, cioè il vettore momento di dipolo per unità di volume¹ è quindi dato dalla somma di due contributi: il primo indotto dal campo elettrico applicato al piezoelettrico, in cui $[\chi]$ rappresenta la matrice 3×3 delle suscettività elettriche, ed il secondo indotto dalle deformazioni meccaniche per effetto piezoelettrico diretto.

In modo analogo possono essere scritte le relazioni che forniscono $\{\varepsilon\}$ e $\vec{\mathcal{P}}$ in termini di tensioni:

$$\{\varepsilon\} = [S] \cdot \{\tilde{\sigma}\} - [d]^T \cdot \{E\} \text{ effetto inverso}$$

$$\vec{\mathcal{P}} = [\chi] \cdot \{E\} + [d] \cdot \{\sigma\} \text{ effetto diretto}$$

dalle quali si deduce la relazione che intercorre tra $[d]$, matrice di dimensioni 3×6 avente per elementi le d_{ij} dette *coefficienti di deformazione piezoelettrica*, o, *costanti piezoelettriche* e la matrice $[e]$:

¹Si ricorda che:

$$\vec{P} = n a \vec{E} dV; \vec{\mathcal{P}} = \chi \vec{E}; \chi = n a \vec{P} = Q \vec{d}$$

in cui \vec{P} è il momento di dipolo del volume dV , n è il numero di molecole per unità di volume, a è la polarizzabilità del materiale, Q è la carica elettrica della molecola di dielettrico, \vec{d} è il vettore che congiunge il baricentro delle cariche negative della molecola al baricentro delle cariche positive.

$$[d] = [S] \cdot [e]$$

in cui $[S]$ è la matrice dei coefficienti di deformabilità, inversa di $[C]$ matrice dei coefficienti di rigidità (che compare nella legge di Hooke generalizzata):

$$[S] = [C]^{-1}$$

Per concludere, si riportano le espressioni delle matrici di coefficienti dielettrici ora introdotte espresse nel riferimento principale cristallografico, per cristallo privo di simmetria, le cui particolarizzazioni per le diverse classi di cristalli aventi diverse caratteristiche di simmetria piezoelettrica, sono riportate in [7, pagine 190–192]:

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix}$$

$$[d] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix}$$

In [7] sono comunque riportate anche le relazioni che permettono di esprimere $[d]$ ed $[e]$ in un riferimento generico ruotato rispetto a quello principale.

Capitolo 6

Modellizzazione del guscio multistrato con strati di piezoelettrico.

6.1 Introduzione.

Nel presente capitolo verranno ricavate le equazioni di equilibrio del guscio composito accoppiato con strati di materiale piezoelettrico, utilizzando il modello di spostamento RZ, per mezzo del principio dei lavori virtuali. Si suppone che nella stratificazione siano presenti N_p strati di materiale piezoelettrico, ciascuno attuabile, nel caso più generale, indipendentemente mediante l'applicazione di un campo elettrico \vec{E}_p funzione delle coordinate spaziali e temporale.

6.2 Equazioni costitutive dello strato di piezoelettrico.

Nel Capitolo 5 sono state presentate le equazioni costitutive del materiale piezoelettrico nel caso generale in cui il campo di tensioni sia tridimensionale. Queste equazioni verranno ora particolarizzate al caso in cui una delle componenti di tensione, la $\sigma_{\zeta\zeta}$, sia trascurabile rispetto alle altre.

L'equazione costitutiva, nella sua forma originale è:

$$\{\tilde{\sigma}\} = [C] \cdot \{\varepsilon\} + [e]^T \cdot \{E\}$$

ma, come si è supposto in precedenza, l'ipotesi introdotta mediante il particolare modello di spostamento adottato, cioè che $\varepsilon_{\zeta\zeta} = 0$, e che $\sigma_{\zeta\zeta} = 0$ implica la sostituzione della matrice delle rigidezze $[C]$ di ordine 6×6 con la matrice delle rigidezze ridotte ed eventualmente trasformate $[Q]$ di ordine 5×5 . Per ciò che riguarda il secondo contributo, invece, basterà considerare in sostituzione della $[e]$ di ordine 3×6 , la matrice $[e']$ di ordine 3×5 ottenuta eliminando in quella originaria la terza colonna che determina la comparsa del contributo $\sigma'_{\zeta\zeta}$ (che nell'espressione della variazione virtuale dell'energia di deformazione elastica darebbe contributo nullo per quanto prima ricordato circa le caratteristiche del modello RZ). L'equazione costitutiva del materiale piezo assume quindi la forma:

$$\{\tilde{\sigma}\} = [Q] \cdot \{\varepsilon\} + [e'] \cdot \{E\} \quad (6.1)$$

con:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{\beta\beta}, \varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha\zeta}, \varepsilon_{\beta\zeta}\}^T$$

$$[e'] = [d'] \cdot [Q] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{12} & e_{22} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{31} & e_{32} & e_{34} & e_{35} & e_{36} \end{bmatrix}$$

$$\{E\} = \{E_\alpha, E_\beta, E_\zeta\}^T$$

6.3 Variazione virtuale dell'energia di deformazione elastica.

Nella scrittura del principio dei lavori virtuali, le sole variazioni che compariranno rispetto al lavoro fatto nel Capitolo 4, relativo alla scrittura delle equazioni di equilibrio del guscio in cui gli eventuali strati di piezoelettrico presenti non venivano attuati, saranno nell'espressione della variazione virtuale dell'energia potenziale elastica. Si è visto, infatti, come in virtù dell'attuazione per effetto di un campo elettrico, si modifica l'equazione costitutiva mediante la comparsa del contributo dovuto all'effetto piezoelettrico inverso. Si potrà quindi scrivere:

$$\delta\Phi = \int_V [\{\varepsilon\}^T \cdot [Q] + \delta_A \{E\}^T \cdot [e']] \delta\{\varepsilon\} dV \quad (6.2)$$

È evidente come, a questo punto, sia necessario esplicitare esclusivamente il secondo contributo, dovuto all'effetto piezoelettrico inverso, in quanto del primo è già disponibile l'espressione 4.31 nel Capitolo 4. Indicando con $\delta\Phi'$ tale contributo, si procede quindi nel suo sviluppo introducendo i termini di tensione σ' indotti dall'attuazione:

$$\delta\Phi' = \int_V \{E\}^T \cdot [e'] \delta\{\varepsilon\} dV$$

$$\delta\Phi' = \int_V \{\sigma'\} \delta\{\varepsilon\} dV$$

Dall'ultima espressione si nota come la $\delta\Phi$ possa essere scritta:

$$\delta\Phi = \int_V [\{\sigma\} + \delta_A \{\sigma'\}] \delta\{\varepsilon\} dV$$

per cui si può facilmente concludere che le equazioni di equilibrio per il guscio accoppiato con strati di materiale piezoelettrico sono formalmente analoghe a quelle già ottenute in precedenza a patto di correggere i termini di risultanti di tensione. Tale correzione si apporta sommando i contributi introdotti dall'effetto piezoelettrico inverso e si vede facilmente come siano formalmente analoghi a quelli definiti nel Capitolo 4, cioè:

$$\begin{aligned} (N'_{\alpha\alpha}, N'_{\alpha\beta}, Q'_\alpha, M'_{\alpha\alpha}, M'_{\alpha\beta}, T'_\alpha, P'_{\alpha\alpha}, P'_{\alpha\beta}) = \\ B^{-1} \langle (\sigma'_{\alpha\alpha}, \sigma'_{\alpha\beta}, \sigma'_{\alpha\zeta}, \zeta\sigma'_{\alpha\alpha}, \zeta^2\sigma'_{\alpha\zeta}, \zeta^3\sigma'_{\alpha\zeta}, \zeta^3\sigma'_{\alpha\beta}) H_\beta \rangle \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} (N'_{\beta\beta}, N'_{\beta\alpha}, Q'_\beta, M'_{\beta\beta}, M'_{\beta\alpha}, T'_\beta, P'_{\beta\beta}, P'_{\beta\alpha}) = \\ B^{-1} \langle (\sigma'_{\beta\beta}, \sigma'_{\beta\alpha}, \sigma'_{\beta\zeta}, \zeta\sigma'_{\beta\beta}, \zeta^2\sigma'_{\beta\zeta}, \zeta^3\sigma'_{\beta\zeta}, \zeta^3\sigma'_{\beta\alpha}) H_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} AB\tilde{Q}'_\alpha = \\ (B M'_{\alpha\alpha})_{,ag} + (A M'_{\beta\alpha})_{,bg} + A_{,\beta} M'_{\alpha\beta} - B'_{,\alpha} M'_{\beta\beta} \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} AB\tilde{Q}'_\beta = \\ (A M'_{\beta\beta})_{,bg} + (B M'_{\alpha\beta})_{,ag} + B_{,\alpha} M'_{\beta\alpha} - A'_{,\beta} M_{\alpha\alpha} \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_{\alpha\alpha}^a & M_{\alpha\alpha}^b & M_{\alpha\alpha}^c & M_{\alpha\alpha}^d \\ M_{\alpha\beta}^a & M_{\alpha\beta}^b & M_{\alpha\beta}^c & M_{\alpha\beta}^d \end{bmatrix} = \\ B^{-1} \langle H_\beta \begin{bmatrix} \sigma'_{\alpha\alpha} \\ \sigma'_{\alpha\beta} \end{bmatrix} \sum_{p=1}^{p-1} [a_p \ b_p \ c_p \ d_p] (\zeta - \zeta_p) \rangle \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{bmatrix} M_{\beta\beta}^a & M_{\beta\beta}^b & M_{\beta\beta}^c & M_{\beta\beta}^d \\ M_{\beta\alpha}^a & M_{\beta\alpha}^b & M_{\beta\alpha}^c & M_{\beta\alpha}^d \end{bmatrix} = A^{-1} < H_{\alpha} \begin{bmatrix} \sigma'_{\beta\beta} \\ \sigma'_{\beta\alpha} \end{bmatrix} \sum_{p=1}^{p-1} [a_p \ b_p \ c_p \ d_p] (\zeta - \zeta_p) > \quad (6.8)$$

$$(\tilde{Q}_{\alpha}^a, \tilde{Q}_{\alpha}^c) = B^{-1} < H_{\beta} \sigma'_{\alpha\zeta} \sum_{p=1}^{p-1} (a_p, c_p) (1 - R_{\alpha}^{-1} \zeta_p) > \quad (6.9)$$

$$(\tilde{Q}_{\beta}^b, \tilde{Q}_{\beta}^d) = A^{-1} < H_{\alpha} \sigma'_{\beta\zeta} \sum_{p=1}^{p-1} (b_p, d_p) (1 - R_{\beta}^{-1} \zeta_p) > \quad (6.10)$$

nelle quali per compattezza di notazione si è posto:

$$< \cdot > = \sum_{p=1}^{N_p} \int_{\zeta_{p-1}}^{\zeta_p} (\cdot) d\zeta$$

6.4 Equazioni di equilibrio e condizioni al contorno.

In base a quanto osservato nel paragrafo precedente risulta immediata la scrittura delle equazioni di equilibrio del guscio composito accoppiato con strati di materiale piezoelettrico. Nel riportarle, si è introdotto l'operatore traccia δ_A il quale assume il valore unitario o nullo a seconda che si voglia considerare o meno la presenza di elementi attuabili nella stratificazione:

$$\begin{aligned} (B\hat{N}_{\alpha\alpha})_{,\alpha} + (A\hat{N}_{\beta\alpha})_{,\beta} + A_{,\beta}\hat{N}_{\alpha\beta} - \hat{N}_{\beta\beta}B_{,\alpha} - ABR_{\alpha}^{-1}\tilde{Q}_{\alpha} = \\ AB({}_{\alpha}^o\mathcal{M}\ddot{u}^o + {}_{\alpha}^{13}\mathcal{M}^a\ddot{g}_{\alpha} + {}_{\alpha}\mathcal{M}_1^c\ddot{g}_{\beta} - {}_{\alpha}\mathcal{M}_1A^{-1}\ddot{w}_{,\alpha}^o) \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$(A\hat{N}_{\beta\beta}),_{\beta} + (B\hat{N}_{\alpha\beta}),_{\alpha} + B_{,\alpha}\hat{N}_{\beta\alpha} - \hat{N}_{\alpha\alpha}A_{,\beta} - ABR_{\beta}^{-1}\tilde{Q}_{\beta} = AB({}_{\beta}^{\circ}\mathcal{M}\ddot{v}^{\circ} + {}_{\beta}^{13}\mathcal{M}^b\ddot{g}_{\beta} + {}_{\beta}\mathcal{M}_1^d\ddot{g}_{\alpha} - {}_{\beta}\mathcal{M}_1B^{-1}\ddot{w}_{,\beta}^{\circ}) \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} (B\tilde{Q}_{\alpha}),_{\alpha} + (A\tilde{Q}_{\beta}),_{\beta} + AB(\hat{N}_{\alpha\alpha}R_{\alpha}^{-1} + \hat{N}_{\beta\beta}R_{\beta}^{-1}) + ABq_{\zeta} = \\ ABm^{\circ}\ddot{w}^{\circ} + (\alpha\mathcal{M}_1B\ddot{u}^{\circ} + m_{24}^aB\ddot{g}_{\alpha} \\ + m_c^2B\ddot{g}_{\beta} - m_2BA^{-1}\ddot{w}_{,\alpha}^{\circ}),_{\alpha} \\ + (\beta\mathcal{M}_1A\ddot{v}^{\circ} + m_{24}^bA\ddot{g}_{\beta} + m_d^2A\ddot{g}_{\alpha} - m_2AB^{-1}\ddot{w}_{,\beta}^{\circ}),_{\beta} \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} AB[\delta_F(\tilde{Q}_{\alpha} - \hat{Q}_{\alpha}) + (\tilde{Q}_{\alpha}^a - \hat{Q}_{\alpha}^a) + (\tilde{Q}_{\beta}^d - \hat{Q}_{\beta}^d)] \\ - \delta_{\hat{T}}\frac{4}{3h^2}[(B\hat{P}_{\alpha\alpha}),_{\alpha} - \hat{P}_{\beta\beta}B_{,\alpha} + (\hat{P}_{\beta\alpha}A),_{\beta} + \hat{P}_{\alpha\beta}A_{,\beta} - 3AB\hat{T}_{\alpha}] = \\ AB[{}_{\alpha}^{13}\mathcal{M}^a\ddot{u}^{\circ} + (\beta\mathcal{M}_1^d)\ddot{v}^{\circ} + (\delta_F m_{24}^a - \delta_T\frac{4}{3h^2}m_{46}^a + m_{24}^{aa} + m_2^{dd})\ddot{g}_{\alpha} \\ + (m_{24}^{ca} + m_{24}^{db})\ddot{g}_{\beta} - m_{24}^aA^{-1}\ddot{w}_{,\alpha}^{\circ} - m_2^dB^{-1}\ddot{w}_{,\beta}^{\circ}] \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} AB[\delta_F(\tilde{Q}_{\beta} - \hat{Q}_{\beta}) + (\tilde{Q}_{\beta}^b - \hat{Q}_{\beta}^b) + (\tilde{Q}_{\alpha}^c - \hat{Q}_{\alpha}^c)] \\ - \delta_{\hat{T}}\frac{4}{3h^2}[(A\hat{P}_{\beta\beta}),_{\beta} - \hat{P}_{\alpha\alpha}A_{,\beta} + (\hat{P}_{\alpha\beta}B),_{\alpha} + \hat{P}_{\beta\alpha}B_{,\alpha} - 3AB\hat{T}_{\beta}] = \\ AB[{}_{\beta}^{13}\mathcal{M}^b\ddot{v}^{\circ} + (\alpha\mathcal{M}_1^c)\ddot{u}^{\circ} + (\delta_F m_{24}^b - \delta_T\frac{4}{3h^2}m_{46}^b + m_{24}^{bb} + m_2^{cc})\ddot{g}_{\beta} \\ + (m_{24}^{ca} + m_{24}^{db})\ddot{g}_{\alpha} - m_{24}^bB^{-1}\ddot{w}_{,\beta}^{\circ} - m_2^cA^{-1}\ddot{w}_{,\alpha}^{\circ}] \end{aligned} \quad (6.15)$$

Le condizioni al contorno geometriche e naturali invece sono:

Geometriche su Γ_u	Naturali su Γ_p
$\hat{N}_{\alpha\nu} - R_{\alpha}^{-1} \hat{M}_{\alpha\nu} = \bar{N}_{\alpha\nu} - R_{\alpha}^{-1} \bar{M}_{\alpha\nu}$	$u^o = \bar{u}^o$
$\hat{N}_{\beta\nu} - R_{\beta}^{-1} \hat{M}_{\beta\nu} = \bar{N}_{\beta\nu} - R_{\beta}^{-1} \bar{M}_{\beta\nu}$	$v^o = \bar{v}^o$
$\hat{V}_n + \hat{M}_{\nu\tau,\tau} = \bar{V}_n + \bar{M}_{\nu\tau,\tau} + [(m_1 - R_{\alpha}^{-1} m_2) \ddot{u}^o + m_{24}^c \ddot{g}_{\beta} + m_{24}^a \ddot{g}_{\alpha} - A^{-1} m_2 \ddot{w}_{,\alpha}^o] \nu_{\alpha}$	
$+ [(m_1 - R_{\beta}^{-1} m_2) \ddot{v}^o + m_{24}^d \ddot{g}_{\alpha} + m_{24}^b \ddot{g}_{\beta} - B^{-1} m_2 \ddot{w}_{,\beta}^o] \nu_{\beta}$	$w^o = \bar{w}^o$
$\hat{M}_{\alpha\nu}^* - \delta_T \frac{4}{3h^2} \hat{P}_{\alpha\nu} = \bar{M}_{\alpha\nu}^* - \delta_T \frac{4}{3h^2} \bar{P}_{\alpha\nu}$	$g_{\alpha} = \bar{g}_{\alpha}$
$\hat{M}_{\beta\nu}^* - \delta_T \frac{4}{3h^2} \hat{P}_{\beta\nu} = \bar{M}_{\beta\nu}^* - \delta_T \frac{4}{3h^2} \bar{P}_{\beta\nu}$	$g_{\beta} = \bar{g}_{\beta}$

nelle quali i simboli asteriscati sono:

$$M_{\alpha\nu}^* = \delta_F M_{\alpha\nu} + M_{\alpha\nu}^a + M_{\beta\nu}^d$$

$$M_{\beta\nu}^* = \delta_F M_{\beta\nu} + M_{\beta\nu}^b + M_{\alpha\nu}^c$$

mentre quelli con cappello indicano le risultanti di tensione totali, cioè dovute alla somma dei due contributi originale e di attuazione, per esempio:

$$\hat{N}_{\alpha\alpha} = N_{\alpha\alpha} + \delta_A N'_{\alpha\alpha}$$

6.5 Risultanti di tensione di attuazione in termini si spostamenti.

6.5.1 Considerazioni.

Le relazioni che verranno riportate di seguito non sono del tutto generiche, ma si fondano su ipotesi che prendono spunto dalle effettive condizioni di

lavoro, delle strutture a controllo distribuito, che si realizzano nell'utilizzo pratico dei materiali piezoelettrici come attuatori.

La prima di queste ipotesi discende direttamente dal fatto che nelle applicazioni pratiche, il controllo dello strato generico di piezo presente nella stratificazione del composito, avviene mediante un campo elettrico indotto per mezzo di sottilissime *armature* immerse nella stratificazione e la cui presenza non varia sensibilmente il comportamento della struttura. Lo strato di piezoelettrico si comporta praticamente come il dielettrico interposto tra le armature di un condensatore elettronico per cui si può facilmente intuire come il vettore campo elettrico in tale situazione, ammetta prevalentemente un'unica componente che è quella diretta secondo l'asse ζ del guscio. La conseguenza di tale osservazione è che allora il vettore \vec{E} sarà:

$$\vec{E} = \{0, 0, E_\zeta\}$$

L'altra ipotesi invece discende dalle caratteristiche del materiale piezoelettrico che trova la sua applicazione ottimale nel controllo distribuito delle strutture, ossia il PVDF (*fluoruro di polivinile*). Questo materiale oltre ad essere elasticamente isotropo, risulta caratterizzato da una matrice dei coefficienti di deformazione piezoelettrici così fatta:

$$[d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$$

e da una matrice dei coefficienti di tensione piezoelettrici:

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & e_{25} & 0 \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} & 0 & 0 & e_{36} \end{bmatrix}$$

in quanto appartenente alla terza classe delle 21 di cristalli piezo, come da [7].

I campi di tensione e di deformazione che vengono indotti nello strato per effetto dell'applicazione del campo elettrico E_ζ risultano quindi:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\alpha} \\ \sigma_{\beta\beta} \\ \sigma_{\zeta\zeta} \\ \sigma_{\alpha\zeta} \\ \sigma_{\beta\zeta} \end{pmatrix} = E_\zeta \cdot \begin{pmatrix} e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \\ 0 \\ 0 \\ e_{36} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\alpha} \\ \varepsilon_{\beta\beta} \\ \varepsilon_{\zeta\zeta} \\ \varepsilon_{\alpha\zeta} \\ \varepsilon_{\beta\zeta} \end{pmatrix} = E_\zeta \cdot \begin{pmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \\ 0 \\ 0 \\ d_{36} \end{pmatrix}$$

per cui le risultanti di tensione che vengono modificate sono la N_{ij} , M_{ij} , P_{ij} , \tilde{Q}_i , M_{ij}^k , con $i, j = \alpha, \beta$.

Onde ricavare le espressioni di tali risultanti in termini di spostamenti indotti, si deve cercare di capire qual'è l'andamento assunto da questi ultimi. Per fare questo si parte dalla considerazione che il campo di deformazioni che viene ingenerato nello strato di piezoelettrico per effetto inverso, ha una legge matematica che a meno del fattore moltiplicativo d_{ij} , risulta essere quello del campo elettrico. Dato che in particolare interessa l'andamento di E_ζ lungo la coordinata ζ , allora esso sarà quello del campo all'interno del dielettrico (il piezo) interposto tra le facce di un condensatore le cui armature sono aderenti alla superficie superiore ed inferiore dello strato piezoelettrico stesso.

Considerando l'andamento del potenziale all'interno di un condensatore dalle armature a forma di calotta sferica¹, e trascurando gli effetti di bordo, si ha [13]:

$$V \equiv \left(\frac{1}{R_e - \zeta} - \frac{1}{R_e} \right)$$

in cui R_e indica il raggio dell'armatura esterna. Derivando tale espressione rispetto a ζ si ottiene l'espressione del campo elettrico che, per $\zeta/R_e \rightarrow 0$ assume la seguente forma:

$$H_e \varepsilon \equiv (1 + \sigma/R_e)$$

cui corrisponde il campo di spostamenti in ζ del tipo riportato da Tzou e Gadre in [2]:

$$\Delta_1 = \Delta_1^o - \beta_1 \zeta$$

$$\Delta_2 = \Delta_2^o - \beta_2 \zeta$$

$$\Delta_3 = \Delta_3^o$$

Inserendo le relazioni ora riportate in quelle di $\varepsilon_{\alpha\zeta} = 0$ e $\varepsilon_{\beta\zeta} = 0$, si ottengono le espressioni di β_1 e β_2 :

$$\beta_1 = \frac{\Delta_1^o}{R_\alpha} + \frac{\Delta_3}{A}$$

$$\beta_2 = \frac{\Delta_2^o}{R_\beta} + \frac{\Delta_3}{B}$$

per cui:

$$\Delta_1 = \Delta_1^o - \zeta \left(\frac{\Delta_1^o}{R_\alpha} + \frac{\Delta_3}{A} \right)$$

$$\Delta_2 = \Delta_2^o - \zeta \left(\frac{\Delta_2^o}{R_\beta} + \frac{\Delta_3}{B} \right)$$

¹Si considera per semplicità una tale geometria che non è altro che un guscio avente i due raggi principali di curvatura uguali.

6.5.2 Espressioni delle deformazioni indotte dall'attuazione.

Le relazioni che forniscono il campo di spostamenti indotto per effetto piezoelettrico inverso possono essere sostituite in quelle delle deformazioni. A conti fatti per lo strato generico di piezo risulta:

$$\begin{aligned} H_\alpha \varepsilon'_{\alpha\alpha} &= \Delta_{1,\alpha} + A_{,\alpha} B^{-1} \Delta_2 - A R_\alpha^{-1} \Delta_3 \\ &\quad - \zeta[(A^{-1} \Delta_{3,\alpha} + R_\alpha^{-1} \Delta_1)_{,\alpha} + A_{,\beta} B^{-1} (B^{-1} \Delta_{3,\beta} + R_\beta^{-1} \Delta_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_\beta \varepsilon'_{\beta\beta} &= \Delta_{2,\beta} + B_{,\beta} A^{-1} \Delta_1 - B R_\beta^{-1} \Delta_3 \\ &\quad - \zeta[(B^{-1} \Delta_{3,\beta} + R_\beta^{-1} \Delta_2)_{,\beta} + B_{,\alpha} A^{-1} (A^{-1} \Delta_{3,\alpha} + R_\alpha^{-1} \Delta_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_\alpha H_\beta \varepsilon'_{\alpha\beta} &= H_\alpha [\Delta_{1,\beta} + B_{,\alpha} A^{-1} \Delta_2] \\ &\quad - \zeta[(A^{-1} \Delta_{3,\alpha} + R_\alpha^{-1} \Delta_1)_{,\beta} - B_{,\alpha} A^{-1} (B^{-1} \Delta_{3,\beta} + R_\beta^{-1} \Delta_2)] H_\alpha \\ &\quad H_\beta [\Delta_{2,\alpha} + A_{,\beta} B^{-1} \Delta_1] \\ &\quad - \zeta[(B^{-1} \Delta_{3,\beta} + R_\beta^{-1} \Delta_2)_{,\alpha} - A_{,\beta} B^{-1} (A^{-1} \Delta_{3,\alpha} + R_\alpha^{-1} \Delta_1)] H_\beta \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = \delta_{3,\zeta}$$

Le componenti di tensione indotte dall'attuazione si ottengono a questo punto dalla legge di Hooke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\alpha\alpha} \\ \sigma_{\beta\beta} \\ \sigma_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\alpha\alpha} \\ \varepsilon_{\beta\beta} \\ \varepsilon_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}$$

e vengono inserite nelle espressioni delle risultanti di tensione indotte. Queste a conti fatti assumono la forma:

$$\begin{aligned}
 N'_{\alpha\alpha} = & \\
 & < C_{11p} \{ [\Delta_{1,\alpha_p} + A_{,\beta} B^{-1} \Delta_{2p}] I_{\beta\alpha_p}^o \\
 & - [(R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1p}),_{\alpha} + A_{,\beta} B^{-1} R_{\beta}^{-1} \Delta_{2p}] I_{\beta\alpha_p}^1 \} A^{-1} \} + \Delta'_{N'_{\alpha\alpha p}} \\
 & + C_{12p} \{ [\Delta_{2,\beta_p} + B_{,\alpha} A^{-1} \Delta_{1p}] h_p^1 \\
 & - [(R_{\beta}^{-1} \Delta_{2p}),_{\beta} + B_{,\alpha} A^{-1} R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1p}] h_p^2 \} B^{-1} \} + \Delta''_{N'_{\alpha\alpha p}} \\
 & + \Delta'''_{N'_{\alpha\alpha p}} > \tag{6.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N'_{\beta\beta} = & \\
 & < C_{22p} \{ [\Delta_{2,\beta_p} + B_{,\alpha} A^{-1} \Delta_{1p}] I_{\alpha\beta_p}^o \\
 & - [(R_{\beta}^{-1} \Delta_{2p}),_{\beta} + B_{,\alpha} A^{-1} R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1p}] I_{\alpha\beta_p}^1 \} B^{-1} \} + \Delta'_{N'_{\beta\beta p}} \\
 & C_{12p} \{ [\Delta_{1,\alpha_p} + A_{,\beta} B^{-1} \Delta_{2p}] h_p^1 \\
 & - [(R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1p}),_{\alpha} + A_{,\beta} B^{-1} R_{\beta}^{-1} \Delta_{2p}] h_p^2 \} A^{-1} \} + \Delta''_{N'_{\beta\beta p}} \\
 & + \Delta'''_{N'_{\beta\beta p}} > \tag{6.17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M'_{\alpha\alpha} = & \\
 & < C_{11p} \{ [\Delta_{1,\alpha_p} + A_{,\beta} B^{-1} \Delta_{2p}] I_{\beta\alpha_p}^1 \\
 & - [(R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1p}),_{\alpha} + A_{,\beta} B^{-1} R_{\beta}^{-1} \Delta_{2p}] I_{\beta\alpha_p}^2 \} A^{-1} \} + \Delta'_{M'_{\alpha\alpha p}} \\
 & C_{12p} \{ [\Delta_{2,\beta_p} + B_{,\alpha} A^{-1} \Delta_{1p}] h_p^2 \\
 & - [(R_{\beta}^{-1} \Delta_{2p}),_{\beta} + B_{,\alpha} A^{-1} R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1p}] h_p^3 \} B^{-1} \} + \Delta''_{M'_{\alpha\alpha p}} \\
 & + \Delta'''_{M'_{\alpha\alpha p}} > \tag{6.18}
 \end{aligned}$$

$$M'_{\beta\beta} =$$

$$\begin{aligned}
 & < C_{22_p} \{ [\Delta_{2,\beta_p} + B_{,\alpha} A^{-1} \Delta_{1_p}] I_{\alpha\beta_p}^2 \\
 & - [(R_{\beta}^{-1} \Delta_{2_p})_{,\beta} + B_{,\alpha} A^{-1} R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1_p}] I_{\alpha\beta_p}^2 \} B^{-1} \} + \Delta'_{M'\beta\beta_p} \\
 & C_{12_p} \{ [\Delta_{1,\alpha_p} + A_{,\beta} B^{-1} \Delta_{2_p}] h_p^2 \\
 & - [(R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1_p})_{,\alpha} + A_{,\beta} B^{-1} R_{\beta}^{-1} \Delta_{2_p}] h_p^3 \} A^{-1} \} + \Delta''_{M'\beta\beta_p} \\
 & + \Delta'''_{M'\beta\beta_p} >
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned}
 P'_{\alpha\alpha} = & \\
 & < C_{11_p} \{ [\Delta_{1,\alpha_p} + A_{,\beta} B^{-1} \Delta_{2_p}] I_{\beta\alpha_p}^3 \\
 & - [(R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1_p})_{,\alpha} + A_{,\beta} B^{-1} R_{\beta}^{-1} \Delta_{2_p}] I_{\beta\alpha_p}^4 \} A^{-1} \} + \Delta'_{P'\alpha\alpha_p} \\
 & C_{12_p} \{ [\Delta_{2,\beta_p} + B_{,\alpha} A^{-1} \Delta_{1_p}] h_p^4 \\
 & - [(R_{\beta}^{-1} \Delta_{2_p})_{,\beta} + B_{,\alpha} A^{-1} R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1_p}] h_p^5 \} B^{-1} \} + \Delta''_{P'\alpha\alpha_p} \\
 & + \Delta'''_{P'\alpha\alpha_p} >
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned}
 P'_{\beta\beta} = & \\
 & < C_{22_p} \{ [\Delta_{2,\beta_p} + B_{,\alpha} A^{-1} \Delta_{1_p}] I_{\alpha\beta_p}^3 \\
 & - [(R_{\beta}^{-1} \Delta_{2_p})_{,\beta} + B_{,\alpha} A^{-1} R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1_p}] I_{\alpha\beta_p}^4 \} B^{-1} \} + \Delta'_{P'\beta\beta_p} \\
 & C_{12_p} \{ [\Delta_{1,\alpha_p} + A_{,\beta} B^{-1} \Delta_{2_p}] h_p^4 \\
 & - [(R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1_p})_{,\alpha} + A_{,\beta} B^{-1} R_{\beta}^{-1} \Delta_{2_p}] h_p^5 \} A^{-1} \} + \Delta''_{P'\beta\beta_p} \\
 & + \Delta'''_{P'\beta\beta_p} >
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned}
 N'_{\alpha\beta} = & \\
 & < C_{66_p} \{ [\Delta_{1,\beta_p} - B_{,\alpha} A^{-1} \Delta_{2_p}] h_p^1 B^{-1} \\
 & - [(R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1_p})_{,\beta} - A^{-1} B_{,\alpha} R_{\beta}^{-1} \Delta_{2_p}] h_p^2 B^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +[\Delta_{2,\alpha_p} - A_{,\beta}B^{-1}\Delta_{1_p}]I_{\beta\alpha_p}^o A^{-1} \\
 & -[(R_{\beta}^{-1}\Delta_{2_p})_{,\alpha} - B^{-1}A_{,\beta}R_{\alpha}^{-1}\Delta_{1_p}]I_{\beta\alpha_p}^1 A^{-1}\} \\
 & +\Delta'_{N'_{\alpha\beta_p}} >
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned}
 N'_{\beta\alpha} = & \\
 & < C_{66_p}\{[\Delta_{2,\alpha_p} - A_{,\beta}B^{-1}\Delta_{1_p}]h_p^1 A^{-1} \\
 & -[(R_{\beta}^{-1}\Delta_{2_p})_{,\alpha} - B^{-1}A_{,\beta}R_{\alpha}^{-1}\Delta_{1_p}]h_p^2 A^{-1} \\
 & +[\Delta_{1,\beta_p} - B_{,\alpha}A^{-1}\Delta_{2_p}]I_{\alpha\beta_p}^o B^{-1} \\
 & -[(R_{\alpha}^{-1}\Delta_{1_p})_{,\beta} - A^{-1}B_{,\alpha}R_{\beta}^{-1}\Delta_{2_p}]I_{\alpha\beta_p}^1 B^{-1}\} \\
 & +\Delta'_{N'_{\beta\alpha_p}} >
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

$$\begin{aligned}
 M'_{\alpha\beta} = & \\
 & < C_{66_p}\{[\Delta_{1,\beta_p} - B_{,\alpha}A^{-1}\Delta_{2_p}]h_p^2 B^{-1} \\
 & -[(R_{\alpha}^{-1}\Delta_{1_p})_{,\beta} - A^{-1}B_{,\alpha}R_{\beta}^{-1}\Delta_{2_p}]h_p^3 B^{-1} \\
 & +[\Delta_{2,\alpha_p} - A_{,\beta}B^{-1}\Delta_{1_p}]I_{\beta\alpha_p}^1 A^{-1} \\
 & -[(R_{\beta}^{-1}\Delta_{2_p})_{,\alpha} - B^{-1}A_{,\beta}R_{\alpha}^{-1}\Delta_{1_p}]I_{\beta\alpha_p}^2 A^{-1}\} \\
 & +\Delta'_{M'_{\alpha\beta_p}} >
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned}
 M'_{\beta\alpha} = & \\
 & < C_{66_p}\{[\Delta_{2,\alpha_p} - A_{,\beta}B^{-1}\Delta_{1_p}]h_p^2 A^{-1} \\
 & -[(R_{\beta}^{-1}\Delta_{2_p})_{,\alpha} - B^{-1}A_{,\beta}R_{\alpha}^{-1}\Delta_{1_p}]h_p^3 A^{-1} \\
 & +[\Delta_{1,\beta_p} - B_{,\alpha}A^{-1}\Delta_{2_p}]I_{\alpha\beta_p}^1 B^{-1} \\
 & -[(R_{\alpha}^{-1}\Delta_{1_p})_{,\beta} - A^{-1}B_{,\alpha}R_{\beta}^{-1}\Delta_{2_p}]I_{\alpha\beta_p}^2 B^{-1}\} \\
 & +\Delta'_{M'_{\beta\alpha_p}} >
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

$$\begin{aligned}
 P'_{\alpha\beta} = & \\
 & < C_{66_p} \{ [\Delta_{1,\beta_p} - B_{,\alpha} A^{-1} \Delta_{2_p}] h_p^3 B^{-1} \\
 & - [(R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1_p})_{,\beta} - A^{-1} B_{,\alpha} R_{\beta}^{-1} \Delta_{2_p}] h_p^5 B^{-1} \\
 & + [\Delta_{2,\alpha_p} - A_{,\beta} B^{-1} \Delta_{1_p}] I_{\beta\alpha_p}^2 A^{-1} \\
 & - [(R_{\beta}^{-1} \Delta_{2_p})_{,\alpha} - B^{-1} A_{,\beta} R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1_p}] I_{\beta\alpha_p}^3 A^{-1} \} \\
 & + \Delta'_{\alpha\beta_p} > \tag{6.26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P'_{\beta\alpha} = & \\
 & < C_{66_p} \{ [\Delta_{2,\alpha_p} - A_{,\beta} B^{-1} \Delta_{1_p}] h_p^3 A^{-1} \\
 & - [(R_{\beta}^{-1} \Delta_{2_p})_{,\alpha} - B^{-1} A_{,\beta} R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1_p}] h_p^5 A^{-1} \\
 & + [\Delta_{1,\beta_p} - B_{,\alpha} A^{-1} \Delta_{2_p}] I_{\alpha\beta_p}^2 B^{-1} \\
 & - [(R_{\alpha}^{-1} \Delta_{1_p})_{,\beta} - A^{-1} B_{,\alpha} R_{\beta}^{-1} \Delta_{2_p}] I_{\alpha\beta_p}^3 B^{-1} \} \\
 & + \Delta'_{\beta\alpha_p} > \tag{6.27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M'_{ii_p}{}^z = & \\
 & < \left\{ \frac{1 - \zeta R_j^{-1}}{H_{\alpha}} C_{1f} [\varepsilon'_{\alpha\alpha_p}{}^{o} + \zeta \varepsilon'_{\alpha\alpha_p}{}^{1}] \right. \\
 & \left. + \frac{1 - \zeta R_j^{-1}}{H_{\beta}} C_{2f} [\varepsilon'_{\beta\beta_p}{}^{o} + \zeta \varepsilon'_{\beta\beta_p}{}^{1}] \right\} \\
 & \sum_{k=1}^{p-1} z_k (\zeta - \zeta_k) > + \Delta'_{M'_{ii_p}{}^z} > \tag{6.28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M'_{ij_p}{}^z = & \\
 & < \frac{1 - \zeta R_j^{-1}}{H_{\alpha} H_{\beta}} C_{66_p} \{ [\varepsilon'_{\alpha\beta_p}{}^{oa} + \zeta \varepsilon'_{\alpha\beta_p}{}^{1a}] H_{\alpha}^{-1} \\
 & [\varepsilon'_{\alpha\beta_p}{}^{ob} + \zeta \varepsilon'_{\alpha\beta_p}{}^{1b}] H_{\beta}^{-1} \} \sum_{k=1}^{p-1} z_k (\zeta - \zeta_k) > + \Delta'_{M'_{ij_p}{}^z} > \tag{6.29}
 \end{aligned}$$

nelle quali per compattezza si è posto:

$$\begin{aligned}\Delta'_{N'\alpha\alpha_p} &= \\ &-C_{11p}\{AR_\alpha^{-1}\Delta_{3p} + \zeta[(A^{-1}\Delta_{3,\alpha_p})_{,\alpha} + A_{,\beta}B^{-2}\Delta_{3,\beta_p}]\frac{1 - \zeta R_\beta^{-1}}{1 - R_\alpha^{-1}}A^{-1}\} \\ \Delta''_{N'\alpha\alpha_p} &= \\ &-C_{12p}\{BR_\beta^{-1}\Delta_{3p} + \zeta[(B^{-1}\Delta_{3,\beta_p})_{,\beta} + B_{,\alpha}A^{-2}\Delta_{3,\alpha_p}]\}B^{-1} \\ \Delta'''_{N'\alpha\alpha_p} &= C_{13p}\Delta_{3,\zeta}(1 - \zeta R_\beta^{-1})\end{aligned}\quad (6.30)$$

$$\begin{aligned}\Delta'_{N'\beta\beta_p} &= \\ &-C_{12p}\{AR_\alpha^{-1}\Delta_{3p} + \zeta[(A^{-1}\Delta_{3,\alpha_p})_{,\alpha} + A_{,\beta}B^{-2}\Delta_{3,\beta_p}]\}A^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta''_{N'\beta\beta_p} &= \\ &-C_{22p}\{BR_\beta^{-1}\Delta_{3p} + \zeta[(B^{-1}\Delta_{3,\beta_p})_{,\beta} + B_{,\alpha}A^{-2}\Delta_{3,\alpha_p}]\frac{1 - \zeta R_\alpha^{-1}}{1 - R_\beta^{-1}}B^{-1}\} \\ \Delta'''_{N'\beta\beta_p} &= C_{23p}\Delta_{3,\zeta}(1 - \zeta R_\alpha^{-1})\end{aligned}\quad (6.31)$$

$$\begin{aligned}\Delta'_{N'\alpha\beta_p} &= \\ &C_{66p}\{ -[(A^{-1}\Delta_{3,\alpha_p})_{,\beta} - B^{-1}A^{-1}\Delta_{3,\beta_p}B_{,\alpha}]\zeta B^{-1} \\ &+ [(B^{-1}\Delta_{3,\beta_p})_{,\alpha} - A^{-1}B^{-1}\Delta_{3,\alpha_p}A_{,\beta}]\zeta \frac{1 - \zeta R_\beta^{-1}}{1 - \zeta R_\alpha^{-1}}A^{-1}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta'_{N'\beta\alpha_p} = & \\ & C_{66_p} \{ -[(B^{-1}\Delta_{3,\beta_p})_{,\alpha} - A^{-1}B^{-1}\Delta_{3,\alpha_p}A_{,\beta}] \zeta A^{-1} \\ & + [(A^{-1}\Delta_{3,\alpha_p})_{,\beta} - B^{-1}A^{-1}\Delta_{3,\beta_p}B_{,\alpha}] \zeta \frac{1 - \zeta R_\alpha^{-1}}{1 - \zeta R_\beta^{-1}} B^{-1} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta'_{M'\alpha\alpha_p} = & \\ & -C_{11_p} \{ AR_\alpha^{-1} \Delta_{3_p} + \zeta [(A^{-1}\Delta_{3,\alpha_p})_{,\alpha} + A_{,\beta} B^{-2} \Delta_{3,\beta_p}] \zeta \frac{1 - \zeta R_\beta^{-1}}{1 - R_\alpha^{-1}} A^{-1} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta''_{M'\alpha\alpha_p} = & \\ & -C_{12_p} \{ BR_\beta^{-1} \Delta_{3_p} + \zeta [(B^{-1}\Delta_{3,\beta_p})_{,\beta} + B_{,\alpha} A^{-2} \Delta_{3,\alpha_p}] \zeta B^{-1} \} \end{aligned}$$

$$\Delta'''_{M'\alpha\alpha_p} = C_{13_p} \Delta_{3,\zeta} (1 - \zeta R_\beta^{-1}) \zeta \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \Delta'_{M'\beta\beta_p} = & \\ & -C_{12_p} \{ AR_\alpha^{-1} \Delta_{3_p} + \zeta [(A^{-1}\Delta_{3,\alpha_p})_{,\alpha} + A_{,\beta} B^{-2} \Delta_{3,\beta_p}] \zeta A^{-1} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta''_{M'\beta\beta_p} = & \\ & -C_{22_p} \{ BR_\beta^{-1} \Delta_{3_p} + \zeta [(B^{-1}\Delta_{3,\beta_p})_{,\beta} + B_{,\alpha} A^{-2} \Delta_{3,\alpha_p}] \zeta \frac{1 - \zeta R_\alpha^{-1}}{1 - R_\beta^{-1}} B^{-1} \} \end{aligned}$$

$$\Delta'''_{M'\beta\beta_p} = C_{23_p} \Delta_{3,\zeta} \zeta (1 - \zeta R_\alpha^{-1}) \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned}\Delta'_{M'\alpha\beta_p} = & \\ & C_{66_p} \{ -[(A^{-1}\Delta_{3,\alpha_p})_{,\beta} - B^{-1}A^{-1}\Delta_{3,\beta_p}B_{,\alpha}] \zeta^2 B^{-1} \\ & + [(B^{-1}\Delta_{3,\beta_p})_{,\alpha} - A^{-1}B^{-1}\Delta_{3,\alpha_p}A_{,\beta}] \zeta^2 \frac{1 - \zeta R_{\beta}^{-1}}{1 - \zeta R_{\alpha}^{-1}} A^{-1} \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta'_{M'\beta\alpha_p} = & \\ & C_{66_p} \{ -[(B^{-1}\Delta_{3,\beta_p})_{,\alpha} - A^{-1}B^{-1}\Delta_{3,\alpha_p}A_{,\beta}] \zeta A^{-1} \\ & + [(A^{-1}\Delta_{3,\alpha_p})_{,\beta} - B^{-1}A^{-1}\Delta_{3,\beta_p}B_{,\alpha}] \zeta^2 \frac{1 - \zeta R_{\alpha}^{-1}}{1 - \zeta R_{\beta}^{-1}} B^{-1} \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta'_{P'\alpha\alpha_p} = & \\ & -C_{11_p} \{ AR_{\alpha}^{-1}\Delta_{3_p} + \zeta [(A^{-1}\Delta_{3,\alpha_p})_{,\alpha} + A_{,\beta}B^{-2}\Delta_{3,\beta_p}] \zeta^3 \frac{1 - \zeta R_{\beta}^{-1}}{1 - R_{\alpha}^{-1}} A^{-1} \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta''_{P'\alpha\alpha_p} = & \\ & -C_{12_p} \{ BR_{\beta}^{-1}\Delta_{3_p} + \zeta [(B^{-1}\Delta_{3,\beta_p})_{,\beta} + B_{,\alpha}A^{-2}\Delta_{3,\alpha_p}] \zeta^3 B^{-1} \}\end{aligned}$$

$$\Delta'''_{P'\alpha\alpha_p} = C_{13_p} \Delta_{3,\zeta_p} (1 - \zeta R_{\beta}^{-1}) \zeta^3 \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned}\Delta'_{P'\beta\beta_p} = & \\ & -C_{12_p} \{ AR_{\alpha}^{-1}\Delta_{3_p} + \zeta [(A^{-1}\Delta_{3,\alpha_p})_{,\alpha} + A_{,\beta}B^{-2}\Delta_{3,\beta_p}] \zeta^3 A^{-1} \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta''_{P'}_{\beta\beta_p} &= \\
 &-C_{22_p} \{ BR_{\beta}^{-1} \Delta_{3_p} + \zeta [(B^{-1} \Delta_{3,\beta_p})_{,\beta} + B_{,\alpha} A^{-2} \Delta_{3,\alpha_p}] \zeta^3 \frac{1 - \zeta R_{\alpha}^{-1}}{1 - R_{\beta}^{-1}} B^{-1} \\
 \Delta'''_{M'}_{\beta\beta_p} &= C_{23_p} \Delta_{3,\zeta_p} \zeta^3 (1 - \zeta R_{\alpha}^{-1}) \quad (6.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta'_{P'}_{\alpha\beta_p} &= \\
 &C_{66_p} \{ -[(A^{-1} \Delta_{3,\alpha_p})_{,\beta} - B^{-1} A^{-1} \Delta_{3,\beta_p} B_{,\alpha}] \zeta^4 B^{-1} \\
 &+ [(B^{-1} \Delta_{3,\beta_p})_{,\alpha} - A^{-1} B^{-1} \Delta_{3,\alpha_p} A_{,\beta}] \zeta^4 \frac{1 - \zeta R_{\beta}^{-1}}{1 - \zeta R_{\alpha}^{-1}} A^{-1} \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta'_{M'}_{\beta\alpha_p} &= \\
 &C_{66_p} \{ -[(B^{-1} \Delta_{3,\beta_p})_{,\alpha} - A^{-1} B^{-1} \Delta_{3,\alpha_p} A_{,\beta}] \zeta^4 A^{-1} \\
 &+ [(A^{-1} \Delta_{3,\alpha_p})_{,\beta} - B^{-1} A^{-1} \Delta_{3,\beta_p} B_{,\alpha}] \zeta^4 \frac{1 - \zeta R_{\alpha}^{-1}}{1 - \zeta R_{\beta}^{-1}} B^{-1} \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta'^z_{ii_p} &= \\
 &\{ -C_{1_f} [\zeta [(A^{-1} \Delta_{3,\alpha_p})_{,\alpha} + A_{,\beta} B^{-2} \Delta_{3,\beta_p}] \\
 &+ AR_{\alpha}^{-1} \Delta_{3_p}] \frac{1 - \zeta R_j^{-1}}{H_{\alpha}} + C_{3_f} \Delta_{3,z_p} \\
 &\{ -C_{2_f} [\zeta [(B^{-1} \Delta_{3,\beta_p})_{,\beta} + B_{,\alpha} A^{-2} \Delta_{3,\alpha_p}] \\
 &+ BR_{\beta}^{-1} \Delta_{3_p}] \frac{1 - \zeta R_j^{-1}}{H_{\beta}} \} \\
 &\sum_{k=1}^{p-1} z_k (\zeta - \zeta_k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta'_{M_{ij}^z} = & \\ & C_{66p} \frac{1 - \zeta R_j^{-1}}{H_\alpha H_\beta} \zeta \{ [(-A^{-1} \Delta_{3,\alpha_p}), \beta + A^{-1} B^{-1} B_{,\alpha} \Delta_{3,\beta_p}] H_\alpha \\ & + [(-B^{-1} \Delta_{3,\beta_p}), \alpha + A^{-1} B^{-1} A_{,\beta} \Delta_{3,\alpha_p}] H_\beta \} \\ & \sum_{k=1}^{p-1} z_k (\zeta - \zeta_k) \end{aligned}$$

con:

$$i, j = \alpha, \beta \quad i \neq j$$

$$f = 1 \quad \text{se } i = \alpha$$

$$f = 2 \quad \text{se } i = \beta$$

$$z = (a, b, c, d)$$

$$\langle \cdot \rangle = \sum_{p=1}^{N_p} \int_{\zeta_{p-}}^{\zeta_p}$$

Capitolo 7

Il controllo.

7.1 Introduzione.

La retroazione è uno dei principali fenomeni esistenti in natura ed è presente in quasi tutti i sistemi dinamici. I concetti di retroazione sono stati però utilizzati quasi esclusivamente dagli ingegneri, per cui la teoria dei sistemi di controllo retroazionati si è sviluppata come una disciplina ingegneristica utile per l'analisi e il progetto dei sistemi pratici di controllo e di altri strumenti tecnologici.

Nel presente capitolo verranno richiamati in maniera concisa i principi della retroazione e della teoria di controllo dei sistemi lineari che saranno utili allo studio del controllo attivo dei gusci in composito.

7.2 I sistemi di controllo.

Verranno ora richiamate alcune definizioni fondamentali di parole chiave appartenenti alla terminologia controllistica:

- per *sistema* si intende un insieme di componenti fisici tra di loro connessi o integrati in modo tale da formare e/o agire come una sola unità;

- per *sistema di controllo* si intende un insieme di componenti fisici tra di loro connessi in modo tale da comandare, dirigere o regolare se stesso o un altro sistema;
- dal punto di vista ingegneristico per *sistema di controllo* si intende un sistema la cui principale funzione è di comandare, dirigere o regolare in senso dinamico o attivo se stesso o un altro sistema;
- per *ingresso* si intende lo stimolo o la sollecitazione applicata ad un sistema di controllo da una sorgente esterna per ottenere in genere una certa risposta dal sistema di controllo;
- per *uscita* si intende l'effettiva risposta ottenuta dal sistema di controllo. Essa può anche non essere uguale alla risposta che l'ingresso implica.

Il fine cui è preposto il sistema di controllo permette di identificare l'ingresso e l'uscita. Questi, se a loro volta sono assegnati, permettono viceversa di identificare i componenti costituenti il sistema di controllo stesso. In generale si possono avere ingressi e uscite molteplici che risultano ben definiti una volta noto il sistema. Purtroppo però, questo non accade sempre a causa di *disturbi* che possono inquinare la risposta rispetto a quella che ci si attende e che devono essere tenuti in considerazione in una schematizzazione di dettaglio del sistema di controllo stesso.

I sistemi di controllo vengono divisi in due principali categorie:

- i sistemi di controllo ad *anello aperto* sono sistemi in cui l'azione di controllo è indipendente dall'uscita del sistema controllato;
- i sistemi di controllo ad *anello chiuso* sono sistemi in cui l'azione di controllo dipende in qualche modo dall'uscita del sistema controllato.

Tale classificazione quindi si basa sulla diversa azione di controllo che viene esercitata sul sistema da controllare al fine di produrne l'uscita desiderata. Gli aspetti caratteristici dei sistemi di controllo ad anello aperto sono:

1. La bontà del loro comportamento è condizionata dalla calibratura. Per calibrare si intende stabilire il legame tra ingresso e uscita al fine di ottenere un'adeguata accuratezza del sistema.
2. In generale essi non presentano problemi di stabilità.

I sistemi di controllo ad anello chiuso sono più comunemente chiamati sistemi di controllo *retroazionati*.

Da quanto fin ora esposto si può subito intuire come siano sistemi di controllo ad anello aperto quelli di controllo passivo del livello vibrazionale delle strutture quali ad esempio i 'dampers', mentre ad anello chiuso siano i sistemi di controllo attivo la cui modellizzazione è obbiettivo di questa tesi.

7.3 La retroazione.

La retroazione o *feedback* è quella proprietà di un sistema ad anello chiuso per cui l'uscita, o qualche altra variabile controllata dal sistema viene confrontata con l'ingresso, o l'ingresso di qualche componente costituente l'intero sistema, così da fornire una opportuna azione di controllo funzione dell'ingresso e dell'uscita.

Un sistema di controllo in retroazione è ad esempio il pilota automatico di un velivolo: l'ingresso del sistema controllato, cioè il velivolo, è rappresentato dalla rotta da seguire, mentre l'uscita è rappresentata dalla rotta effettivamente seguita; se l'errore definito dalla differenza tra ingresso e uscita risultasse nullo, il controllo non opererebbe sulle superfici mobili mentre, in caso contrario, produrrebbe dei segnali di comando atti ad annullarlo.

Le principali caratteristiche che la presenza di retroazione fornisce ad un sistema sono le seguenti:

- Aumento della precisione, cioè della possibilità di riprodurre fedelmente l'ingresso.
- Riduzione della sensibilità del rapporto tra ingresso e uscita alle variazioni delle caratteristiche del sistema.
- Aumento della banda passante, ossia del campo di frequenze dell'ingresso per cui il sistema risponde bene.
- Tendenza all'instabilità.

7.4 Rappresentazione dei sistemi.

Per l'analisi e il progetto di un sistema vengono utilizzate le forme più opportune per la rappresentazione della struttura del sistema e dei suoi componenti.

Nello studio dei sistemi di controllo sono frequentemente impiegati tre fondamentali metodi di descrizione (modelli) di componenti fisici e di sistemi:

1. Equazioni differenziali ed altre relazioni matematiche.
2. Schemi a blocchi.
3. Schemi di flusso.

Gli schemi a blocchi, che qui verranno presi in considerazione, e di flusso sono succinte rappresentazioni grafiche sia dello schema di un sistema fisico, sia dell'insieme delle equazioni matematiche che caratterizzano le sue diverse parti.

7.5 Schemi a blocchi.

Uno schema a blocchi è una rappresentazione grafica delle relazioni di causa effetto fra ingresso e uscita di un sistema fisico. Esso fornisce un metodo conveniente per caratterizzare le relazioni funzionali tra i vari componenti di un sistema di controllo. I componenti di un sistema sono anche detti elementi del sistema e la più semplice struttura di un sistema a blocchi è il singolo blocco con un ingresso ed un'uscita.

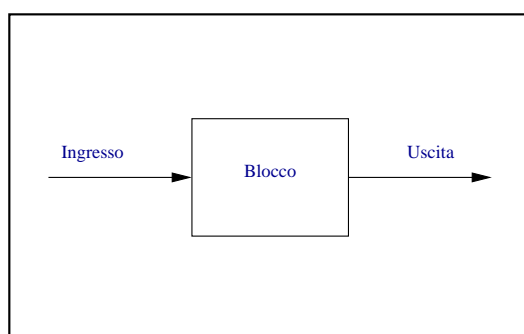


Figura 7.1. Blocco di un sistema.

All'interno del rettangolo che rappresenta il blocco, c'è di solito la descrizione o il nome dell'elemento o un operatore matematico che caratterizza la relazione fra ingresso e uscita. La freccia rappresenta il verso di percorrenza dell'informazione o del segnale.

Le operazioni di somma e sottrazione vengono rappresentate mediante un piccolo cerchio detto *nodo sommatore*, nel quale può convergere un numero qualsiasi di ingressi. A ciascuna freccia in ingresso è associato il segno più o meno e la somma algebrica degli ingressi.

Si usa il *punto di diramazione* quando lo stesso segnale o la stessa variabile costituisce l'ingresso a più blocchi o nodi sommatori. Il punto di diramazione permette al segnale di procedere inalterato per diverse vie a diverse destinazioni.

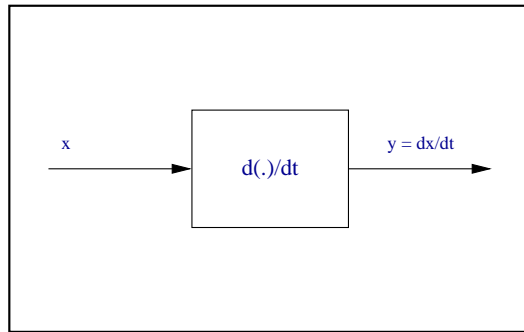


Figura 7.2. Esempio di operazione svolta dall'elemento di controllo.

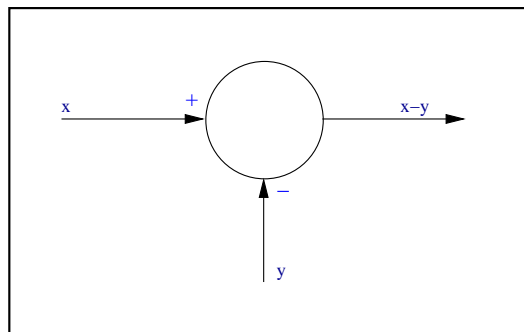


Figura 7.3. Nodo sommatore.

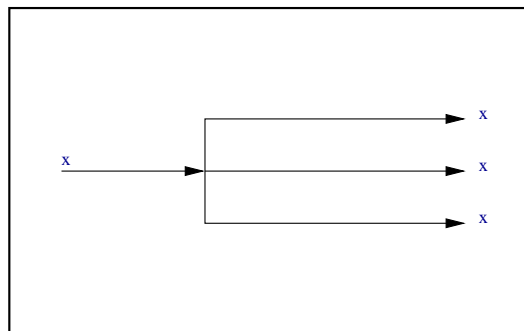


Figura 7.4. Punto di diramazione.

7.6 Schema a blocchi di un sistema di controllo retroazionato.

I blocchi che rappresentano i vari componenti di un sistema di controllo sono connessi in modo da caratterizzare le loro relazioni funzionali all'interno del sistema stesso. La struttura di base di un semplice sistema di controllo ad anello chiuso è illustrato nello schema a blocchi di Figura 7.5. Appare chiaro che le frecce dell'anello chiuso che connettono un blocco all'altro si riferiscono al verso di percorrenza dell'energia associata al segnale e non alla principale sorgente di energia del sistema.

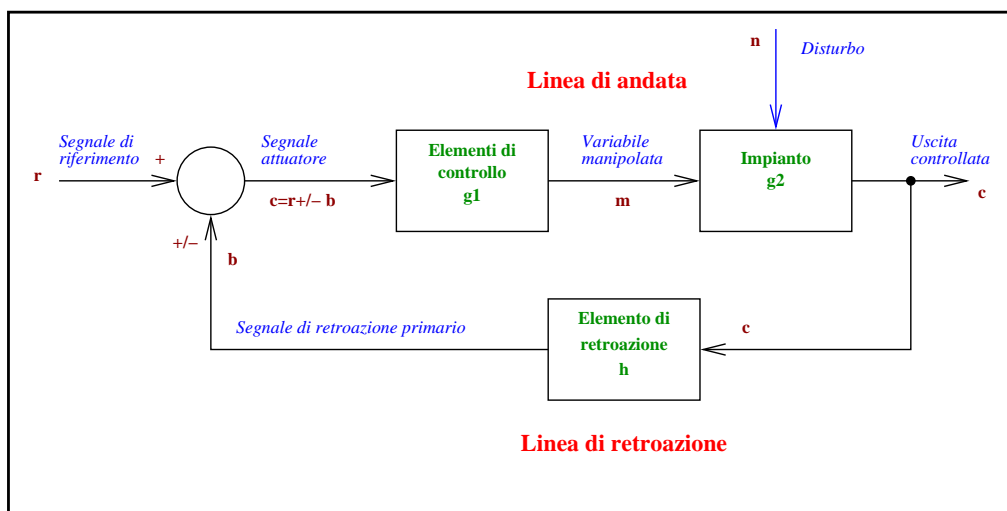


Figura 7.5. Schema generale di un sistema di controllo retroazionato.

Le variabili in ingresso e in uscita da ogni elemento, rappresentate in lettere minuscole, sono da intendersi come funzioni del tempo. Nel caso compaiano le trasformate di Laplace o di Fourier, funzioni della variabile complessa s e di $j\omega$, queste compariranno indicate in lettere maiuscole. In particolare:

- L'impianto g_2 , detto anche sistema controllato, è il corpo, il processo, o la macchina di cui viene controllata una certa grandezza o una particolare condizione.
- L'elemento di controllo g_1 , detto anche controllore, è quel componente che fornisce un segnale di controllo opportuno all'impianto.
- L'elemento di retroazione h è quel componente necessario per ottenere una relazione funzionale fra l'uscita controllata c e il segnale di retroazione primario b .
- Il segnale di riferimento r è un ingresso applicato dall'esterno al sistema di controllo retroazionato per ottenere un dato comportamento dell'impianto. Spesso esso rappresenta la risposta ideale che si vorrebbe dall'impianto.
- L'uscita controllata c è quella grandezza o condizione dell'impianto che viene controllata.
- Il segnale di retroazione primario b è un segnale funzione dell'uscita controllata c e che viene algebricamente sommato al segnale di riferimento r per ottenere il segnale attuatore e .
- Il segnale attuatore e , detto anche errore o azione di controllo, è la somma algebrica data dal segnale di riferimento r meno il segnale di retroazione primario b .
- La variabile manipolata m (segnale di controllo) è quella grandezza che gli elementi di controllo g_1 applicano all'impianto g_2 .
- Il disturbo u è un ingresso indesiderato che agisce sull'impianto influenzando la variabile di uscita c . Esso può sommarsi direttamente a m o agire su un punto intermedio.

- La linea di andata è quella parte di sistema compresa fra il segnale attuatore e l'uscita controllata c .
- La linea di retroazione è quella parte del sistema compreso tra l'uscita controllata c e il segnale di retroazione primario b .

7.7 Schema a blocchi del guscio multistrato retroazionato.

7.7.1 Schema a blocchi del guscio multistrato.

Il guscio multistrato, il cui studio del controllo attivo è obbiettivo di questo capitolo, è un corpo continuo supposto elastico lineare nel quale possono essere presenti fenomeni dissipativi, che nelle equazioni trovate possono essere debitamente tenuti in conto mediante un opportuno smorzamento strutturale (quindi mediante l'adozione di un modulo elastico complesso), ed avente una certa massa. In virtù di tali caratteristiche, esso può essere trattato come un sistema soggetto a forze di tipo elastico, dissipative ed inerziali oltre che ad un sistema di forze esterne. Queste ultime costituiscono l'ingresso del sistema guscio e l'uscita sarà rappresentata dalla sua configurazione deformata descritta da un insieme di funzioni dipendenti dalle coordinate geometriche e spaziali. Dato che da queste e dalle loro derivate nel tempo dipendono le forze interne di tipo elastico, dissipativo e inerziale, si constata che il guscio stesso costituisce un sistema retroazionato come rappresentato nel diagramma a blocchi in Figura 7.6.

7.7.2 Il guscio controllato in retroazione.

Il 'sistema' guscio rappresenta il sistema da controllare in modo tale che, se soggetto ad un disturbo che instauri in esso delle vibrazioni, queste vengano

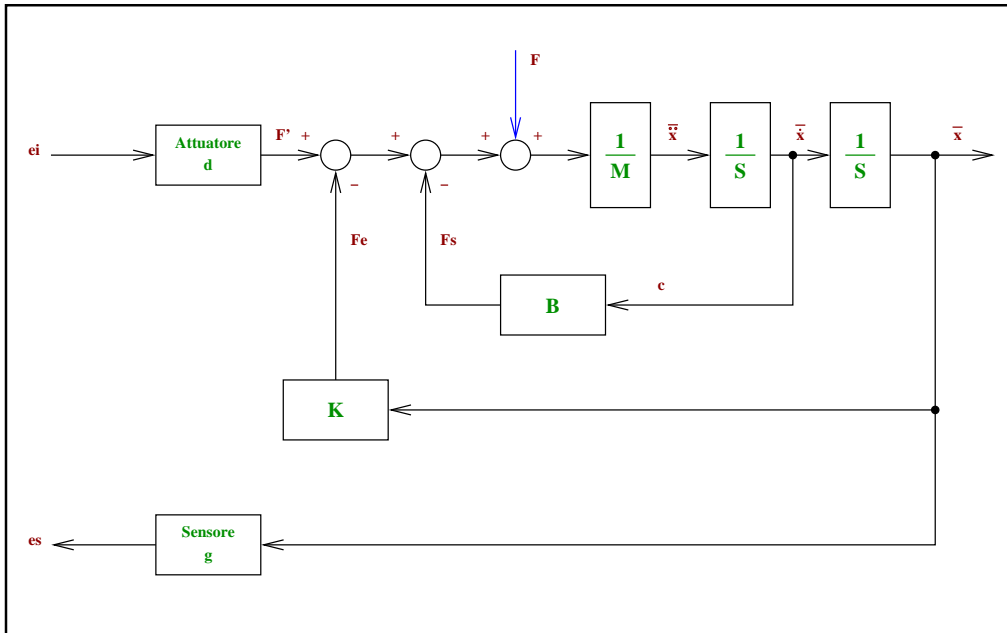


Figura 7.6. Rappresentazione a blocchi del guscio.

prontamente estinte dal sistema di controllo. Il segnale in uscita dal guscio è un segnale in tensione prodotto per effetto piezoelettrico diretto dagli strati di tale materiale che nella stratificazione hanno il compito di sensori. Questo è essenzialmente il segnale errore di posizione rispetto alla configurazione indisturbata che si vuole rendere nullo per effetto del controllo. L'errore viene elaborato dalla parte circuitistica elettronica, caratterizzata dalla funzione di trasferimento C , ed inviato agli strati di materiale piezoelettrico che nella stratificazione funzionano da attuatori i quali, a loro volta, produrranno per effetto inverso delle tensioni meccaniche nel guscio atte a stabilizzarlo.

Il feedback di posizione e di velocità.

Alcune importanti osservazioni devono essere fatte circa la funzione di trasferimento C . Questa è rappresentata nel caso generale da un numero complesso per cui il segnale in ingresso agli attuatori sarà sfasato rispetto al segnale

errore. In genere però, dato che i tempi caratteristici di risposta della parte elettronica sono di gran lunga inferiori rispetto a quelli che governano il comportamento meccanico della struttura, rappresentata ad esempio da un esteso pannello in un vettore spaziale, si può generalmente trascurare lo sfasamento del segnale di controllo rispetto a quello errore e considerare istantanea la dinamica del circuito elettronico. Questa osservazione permette di dire quindi che, nel caso in cui C sia rappresentato da un numero reale, il controllo della grandezza errore di posizione può essere fatto assoggettando il guscio a delle forze attuative in fase con quest'ultima. Tali forze, di tipo conservativo non immetteranno né preleveranno energia dal sistema ma, comportandosi come forze di tipo elastico ne varieranno esclusivamente la rigidità e quindi le frequenze proprie. Qualora si opti per questo tipo di controllo allora si effettuerà il controllo in *feedback di posizione*. Un tale tipo di feedback può essere utile quindi qualora si voglia aumentare la rigidità della struttura per aumentarne le frequenze proprie ed allontanarsi da una situazione pericolosa.

Nel caso in cui si adotti C complesso puro, le forze di attuazione risulteranno essere in quadratura con il segnale errore di posizione. Questo permette di affermare che esse si comporteranno come delle forze di smorzamento, a patto che la quadratura sia di anticipo. Questo è il *feedback di velocità* in quanto le forze attuative sono in fase con le velocità, e permette di variare lo smorzamento interno del materiale in modo che i fenomeni vibratorii indotti da disturbi esterni siano caratterizzati da più alti valori dello smorzamento.

Quanto ora affermato risulterebbe rigorosamente esatto solo se lo smorzamento strutturale fosse nullo: solo in tal caso si potrebbe parlare di quadratura di fase. Lo smorzamento interno nella struttura reale esiste e fa in modo che la risposta sia in ritardo rispetto all'ingresso, cioè rispetto al segnale errore. Tale osservazione porta quindi a concludere che in effetti il controllo deve inviare all'attuatore un segnale che ha un angolo di sfasamento in anticipo, rispetto all'uscita del sensore, maggiore di 90° al fine di operare un feedback

di velocità. In pratica, però, gli smorzamenti strutturali sono sempre bassi e tali da non operare un ritardo sulla risposta che potrebbe instabilizzare il sistema e comunque tali da non rendere grossolana l'ipotesi fatta di quadratura di anticipo.

Nulla comunque vieta di adottare C complesso in modo da poter effettuare un controllo misto, di posizione e di velocità anche se è il feedback di velocità che viene preso in considerazione al fine di smorzare il più rapidamente possibile le vibrazioni indotte dai disturbi.

7.8 La funzione di trasferimento del sistema retroazionato.

Dal diagramma a blocchi del sistema retroazionato si può dedurre la funzione di trasferimento del sistema retroazionato:

$$S = \frac{G}{1 + GC}$$

in cui:

- S rappresenta la funzione di trasferimento del sistema retroazionato.
- G rappresenta la funzione di trasferimento del guscio.
- C rappresenta la funzione di trasferimento del circuito di controllo.
- GC rappresenta la funzione di trasferimento del sistema ad anello aperto.

La funzione di trasferimento del sistema gode delle seguenti proprietà:

1. La funzione di trasferimento di un sistema è la trasformata di Laplace della sua risposta all'impulso unitario con tutte le condizioni iniziali nulle.

2. La funzione di trasferimento di un sistema può essere ottenuta considerando la trasformata di Laplace dell'equazione differenziale del sistema e trascurando tutti i termini dovuti alle condizioni iniziali. Essa sarà quindi data da:

$$S(s) = \frac{U(s)}{I(s)}$$

3. L'equazione differenziale del sistema può essere ottenuta dalla funzione di trasferimento sostituendo alla variabile s l'operatore differenziale $D = d/dt$.
4. La stabilità di un sistema invariante nel tempo può essere determinata dall'equazione caratteristica. Di conseguenza se tutte le radici del denominatore hanno la parte reale negativa il sistema è stabile.
5. Le radici del denominatore sono *poli* del sistema e le radici del numeratore sono gli *zeri*. La funzione di trasferimento di un sistema può essere definita, a meno di una costante, assegnando poli e zeri del sistema. Questa costante K prende il nome di *guadagno*. I poli e gli zeri possono essere definiti sul piano complesso.

7.9 Il guscio stratificato retroazionato in velocità.

Nel Capitolo 4 sono stati ricavati i termini correttivi delle risultanti di tensione da introdurre nelle equazioni di equilibrio del guscio stratificato. In questi termini compare la componente del campo elettrico che induce nello strato di piezoelettrico comandato un campo di deformazioni di attuazione. Il campo elettrico risulta legato alla tensione elettrica applicata sulle facce dello strato di piezoelettrico da relazioni note, una volta nota la geometria

dello strato stesso. La tensione elettrica di attuazione sarà legata a quella rilevata dagli strati sensori attraverso la funzione di trasferimento dell'apparato elettronico di controllo attraverso la sua funzione di trasferimento C :

$$\bar{e}_a = C\bar{e}_s$$

Controllando il sistema in feedback di velocità, il segnale elettrico di uscita \bar{e}_a dovrà essere sfasato in quadratura di anticipo rispetto al segnale \bar{e}_s ed opportunamente amplificato per cui la funzione di trasferimento del controllo sarà:

$$C = Cj \quad \text{con } j = \sqrt{-1}$$

Il numero reale C rappresenta il guadagno dell'amplificatore usato per controllare il sistema e a seconda del suo valore si può rendere più efficace lo smorzamento dei fenomeni vibratorii. Esso comunque non può essere incrementato in maniera arbitraria poiché si potrebbe rendere instabile il sistema.

7.10 Stabilità del sistema retroazionato.

Come si è già accennato, uno dei problemi dei sistemi retroazionati è la loro stabilità. Un criterio che permette di valutarla è quello di Routh.

Prima di descriverlo si ricorda che: *un sistema è stabile se la sua risposta all'impulso tende a zero al tendere ad infinito del tempo* o anche *un sistema è stabile se ogni ingresso limitato produce una uscita limitata*.

La risposta all'impulso di un sistema lineare contiene dei termini esponenziali del tempo i cui esponenti sono le radici dell'equazione caratteristica: ai fini della sua stabilità è necessario che le parti reali di tali esponenti siano negative. Questa condizione assicura che la risposta impulsiva tenda esponenzialmente a zero. Se un sistema ha qualche radice con parte reale nulla,

ma nessuna con parte reale positiva allora esso è al limite della stabilità. In questo caso la risposta impulsiva non va a zero anche se resta limitata ma, dato che certi ingressi possono produrre uscite non limitate, i sistemi al limite di stabilità vengono ritenuti instabili.

7.10.1 Criterio di Routh.

Il criterio di Routh è un metodo che permette di determinare la stabilità di un sistema la cui equazione caratteristica è un polinomio di ordine n del tipo:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

per mezzo della tabella di Routh:

$$\begin{array}{cccccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

in cui i coefficienti:

$$b_1 = a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3} \quad b_2 = a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-5}$$

$$c_1 = a_{n-3} - \frac{a_{n-1}}{b_1} b_2 \quad c_2 = a_{n-5} - \frac{a_{n-1}}{b_1} b_3$$

La tavola si completa in senso orizzontale e verticale fino a che si ottengono solo zeri. Tutte le radici dell'equazione caratteristica hanno parte negativa se e solo se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh hanno lo stesso segno. Il numero di radici con parte reale positiva è uguale al numero di cambiamenti di segno.

Spesso è importante poter determinare l'intervallo di valori di un certo parametro di un sistema per cui questo è stabile come ad esempio il guadagno

C dell'amplificatore. Ciò può essere ottenuto scrivendo delle disuguaglianze che assicurano che non vi sia cambiamento di segno nella prima colonna della tabella di Routh. Queste disuguaglianze permettono di determinare il campo di variazioni ammissibili per il parametro considerato.

Il criterio di Routh ora descritto permette quindi di valutare la stabilità del sistema e la stabilità relativa di sistemi controllati con amplificatori e rifasatori dalla dinamica istantanea. Nel caso in cui si vogliano controllare disturbi che inducono nel sistema vibrazioni dalle frequenze molto elevate, l'ipotesi di istantaneità della dinamica diventa grossolana. Bisogna quindi tener conto dei ritardi che determinerebbero la comparsa nell'equazione caratteristica di termini esponenziali che renderebbero inservibile il criterio di Routh. In questi casi l'analisi del sistema dovrà essere fatta ricorrendo a mezzi matematici più sofisticati quali l'analisi di Nyquist o quella del luogo delle radici che permettono di definire anche la stabilità relativa del sistema.

Capitolo 8

La trave controllata in feedback di velocità.

8.1 Introduzione.

Nel presente capitolo si vuole presentare lo studio analitico delle oscillazioni libere di una trave incastrata prismatica, soggetta a controllo distribuito di velocità. Viene riportato l'andamento nel tempo dello spostamento dell'estremità della trave al variare del *guadagno di retroazione* insieme al decremento logaritmico delle oscillazioni. Mediante la condizione al contorno imposta sulla posizione iniziale dell'estremità, viene eccitato il primo modo di vibrare studiandone in questo modo l'attenuazione per effetto della retroazione. I risultati numerici ottenuti per via analitica sono confrontati con quelli ottenuti per via sperimentale riportati in ???. Vengono inoltre fatte alcune osservazioni relative al problema della scelta della distribuzione spaziale di tensione da adottare al fine di ottimizzare l'efficacia del controllo stesso.

8.2 Descrizione della struttura.

Viene presa in considerazione una trave in plexiglas la quale viene controllata mediante l'azione di uno strato di materiale piezoelettrico PVDF perfettamente incollato sulla sua superficie superiore. Lo strato di PVDF è soggetto ad un potenziale elettrico funzione del tempo e della coordinata assiale della trave:

$$V = V(x; t)$$

che per effetto piezoelettrico inverso, ingenera nello strato attuatore un campo di deformazioni che determina la nascita di tensioni meccaniche di controllo.

L'elemento sensore è rappresentato da un accelerometro fissato sull'estremità libera della trave. Il segnale di accelerazione viene tradotto in segnale di velocità da un integratore e poi amplificato. Il segnale così ottenuto è quello che viene inviato allo strato di piezoelettrico.

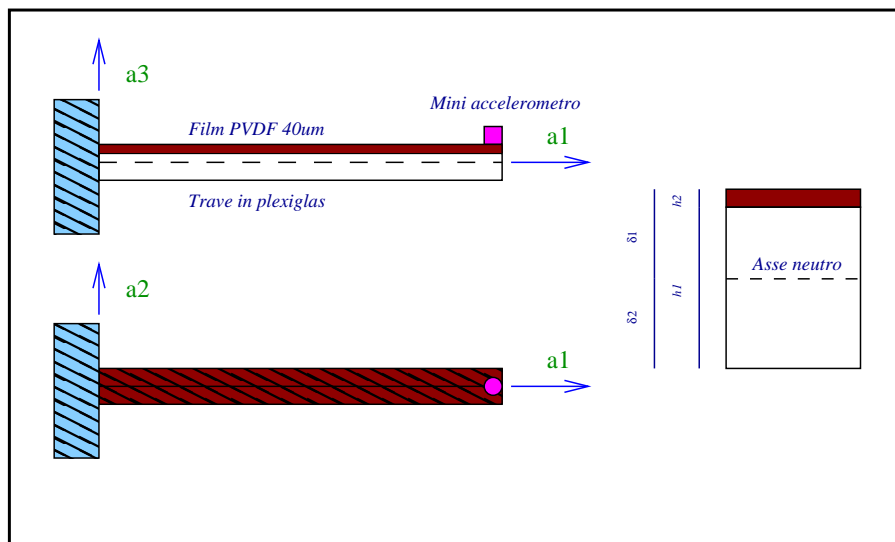


Figura 8.1. Trave incastrata accoppiata con uno strato di PVDF.

Indicando col pedice 1 le grandezze riferite allo strato in plexiglas e con 2 le grandezze che si riferiscono al piezoelettrico, si riportano di seguito i valori numerici delle grandezze in gioco:

E_1	$3.447 \cdot 10^9$	modulo di Young N/m^2
E_2	$3.704 \cdot 10^9$	modulo di Young N/m^2
ρ_1	1190	densità kg/m^3
h_1	1.5875	spessore m
h_2	$40 \cdot 10^{-6}$	spessore m
m_{tip}	$6.5 \cdot 10^{-4}$	massa accelerometro kg
l	$6.985 \cdot 10^{-2}$	lunghezza m
b	$6.35 \cdot 10^{-3}$	larghezza m
d_{31}	$8 \cdot 10^{-22}$	costante piezoelettrica C/V
η	$5.00 \cdot 10^{-2}$	fattore di perdita

8.3 Equazione del moto.

L'equazione del moto della trave controllata può essere facilmente ricavata dalle equazioni generali del guscio riportate nel Capitolo 6 ponendo:

$$A = B = 1$$

$$R_\alpha^{-1}, R_\beta^{-1} \rightarrow \infty$$

$$\alpha = x \quad \beta = y \quad \zeta = z$$

$$\delta_T = \delta_F = \theta_k = \psi_k = 0 \rightarrow CLT$$

Così facendo si ottiene:

$$(N_{xx} + \delta_A N'_{xx})_{,x} = m_o \ddot{u}^o - m_1 \ddot{w}_{,x}^o \quad (8.1)$$

$$(M_{xx} + \delta_A M'_{,xx})_{,xx} + \bar{q}_z = m_o \ddot{w}_o + (m_1 \ddot{u}^o - m_2 \ddot{w}_{,x}^o)_{,x} \quad (8.2)$$

La prima di queste due relazioni rappresenta l'equazione di equilibrio alla traslazione lungo l'asse x longitudinale, mentre la seconda è l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale ossia quella che regola il moto flessionale della trave. Sarà quest'ultima ad essere presa in considerazione. Si può notare come i contributi di inerzia rotatoria realizzino un accoppiamento tra il comportamento flessionale e longitudinale. Essendo comunque tali contributi in genere trascurabili rispetto a quelli di inerzia traslatoria, non verranno considerati, disaccoppiando in tale modo le equazioni di equilibrio. L'equazione da risolvere è dunque:

$$(M_{xx} + \delta_A M'_{,xx})_{,xx} + \bar{q}_z = m_o \ddot{w}_o \quad (8.3)$$

con:

$$M_{xx} = -D_{11} w_{,xx}^o$$

$$M'_{xx} = C_{112} \Delta_{12,x}^o h_p^1$$

Dato che il materiale piezoelettrico usato è elasticamente isotropo, allora $C_{111} = E_2$ mentre $h^1 = h_2$ è lo spessore dello strato piezoelettrico. Il termine D_{11} rappresenta la rigidezza flessionale della trave:

$$D_{11} b = E_1 I_1 + E_2 I_2 = EI$$

I momenti d'inerzia I_1 dello strato di plexiglas e I_2 dello strato piezoelettrico sono valutati rispetto all'asse di simmetria elastica della sezione trasversale della trave che definisce nel piano xy la superficie di riferimento della trave. La distanza di tale asse dalla superficie superiore vale:

$$\delta_t = \frac{E_1 h_1^2 + E_2 h_2^2 + 2E_2 h_1 h_2}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)}$$

8.4 Moto della trave non attuata non smorzata.

L'equazione che regola il moto del sistema non controllato e non smorzato, permette la valutazione delle frequenze proprie della trave è:

$$-w_{,xxxx}EI = m_ob\ddot{w}$$

in cui $m_ob = A\rho$ è la massa per unità di lunghezza della trave.

Adottando l'adimensionalizzazione:

$$x = l\xi$$

l'equazione della trave può essere riscritta:

$$-w_{,\xi\xi\xi\xi}EI = \rho Al^4\ddot{w}$$

e risolta mediante separazione delle variabili ponendo:

$$w = w^*(x)q(t)$$

e sostituendo:

$$-w_{,\xi\xi\xi\xi}EIq = \rho Al^4\ddot{q}w$$

Si otterrà in fine:

$$\frac{\ddot{q}}{q} = -\frac{w_{,\xi\xi\xi\xi}}{w} \frac{EI}{\rho Al^4}$$

che ha senso solo se posta uguale ad una costante, qui indicata come ω^2 .

Si porrà inoltre:

$$\lambda^4 = \frac{Ml^3\omega^2}{EI}$$

in cui M rappresenta la massa della trave. Dato che si vuole studiare il moto libero del sistema, di tipo oscillatorio, ω rappresenta la pulsazione naturale del sistema che può essere trovata risolvendo l'equazione:

$$w_{,\xi\xi\xi\xi}^* - \lambda^4 w^* = 0$$

che ha soluzione del tipo:

$$w^* = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x) + c_3 \sinh(\lambda x) + c_4 \cosh(\lambda x) \quad (8.4)$$

le cui costanti c_i possono essere trovate inserendola nelle condizioni al contorno:

$$w^*(\xi = 0) = 0$$

$$w'^*(\xi = 0) = 0$$

$$w''^*(\xi = 1) = 0$$

$$w''''^*(\xi = 1) = -\frac{l^3 m_{tip} \omega^2}{EI} w^*(\xi = 1)$$

imposte dalle condizioni di incastro, estremo libero e massa concentrata su quest'ultimo (come da [3]). Il sistema di equazioni algebriche ottenuto è naturalmente omogeneo, perchè si sta studiando un problema di oscillazioni libere, e ammette soluzione non banale se il determinante di tale sistema è nullo. L'espressione di tale determinante è:

$$\begin{aligned} & (\sin \lambda + \sinh \lambda)[(\sin \lambda - \sinh \lambda) + K\lambda(\cos \lambda - \cosh \lambda)] \\ & - (\cos \lambda + \cosh \lambda)[-(\cos \lambda - \cosh \lambda) + K\lambda(\sin \lambda - \sinh \lambda)] = 0 \end{aligned}$$

con $K = m_{tip}/M$.

Questa equazione in λ è stata risolta con una calcolatrice HP42S ed i primi due valori ottenuti sono:

$$\lambda_1 = 1.311816 \quad \lambda_2 = 4.056$$

Questi possono essere inseriti nella:

$$f = \frac{1}{2\pi} \lambda \sqrt{\frac{KI}{Ml^3}}$$

e le prime due frequenze proprie trovate sono:

$$f_1 = 43.78 \text{ Hz} \quad f_2 = 418.6 \text{ Hz}$$

8.5 Moto smorzato della trave non attuata.

I fenomeni dissipativi interni del materiale vengono tenuti in conto mediante l'introduzione di un fattore di perdita η , cioè di un modulo elastico complesso:

$$\bar{E} = E(1 + j\eta)$$

Il fattore di perdita viene determinato sperimentalmente facendo uso del decremento logaritmico così definito:

$$\zeta = \frac{\ln(w_i/w_{i+n})}{2\pi n}$$

che sviluppato da:

$$\zeta = \frac{\eta}{2\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{4}}}$$

L'equazione da risolvere per il sistema smorzato è dunque:

$$s w_{,\xi\xi\xi\xi}^* q + A w^* \ddot{q} = 0$$

Procedendo in modo analogo a prima, si ottiene:

$$-\frac{w^*_{,\xi\xi\xi\xi} s}{w^* A} = \frac{\ddot{q}}{q} = \omega^2$$

in cui si è posto:

$$s = (1 + j\eta)$$

$$A = \frac{Ml^3}{sEI}$$

Questa volta ω è un numero complesso mentre il coefficiente λ viene posto:

$$\lambda^4 = \frac{A}{s}\omega^2$$

Essendo:

$$\frac{\lambda^4}{A} = \omega_n^2$$

la pulsazione naturale del sistema non smorzato, allora:

$$\omega = \omega_n \sqrt{s}$$

per cui:

$$\omega = \omega_n \left[-\sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}-1}{e}} + j\sqrt{\frac{\sqrt{1+\eta^2}+1}{e}} \right]$$

Essendo però $\eta \ll 1$ si pu' scrivere:

$$\omega = \omega_n \left[-\frac{\eta}{2} \pm j\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{4}} \right]$$

La condizione iniziale che è stata imposta consiste in uno spostamento dell'estremità della trave di 1 cm:

$$w^*(\xi = 1; t = 0) = 1 \text{ cm} = \bar{w}$$

La legge del moto dell'estremità della trave smorzata è quindi:

$$w_{tip} = \bar{w} \cos \omega_n \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{4}} t e^{-\frac{\omega_n \eta}{2} t}$$

Il fatto che la frequenza di oscillazione del sistema con smorzamento strutturale sia maggiore di quella con un sistema con smorzamento viscoso si spiega con il fatto che il primo può essere assimilato ad uno smorzamento viscoso inversamente proporzionale alla frequenza, per cui risulta più efficace a basse frequenze [14].

8.6 Moto della trave retroazionata.

I due autori dell'esperimento hanno imposto una distribuzione di tensione elettrica:

$$V(\xi; t) = V_a g(t)$$

quindi costante con x . Tale scelta determina la scomparsa del termine di attuazione dall'equazione del moto che risulta quindi:

$$s w_{,\xi\xi\xi\xi} - A \ddot{w} = 0$$

Questa equazione viene risolta in modo analogo alle precedenti ponendo al solito:

$$\lambda^4 = \frac{m l^3 \omega^2}{EI} = A \omega^2$$

Le condizioni al contorno ora sono:

$$w^*(\xi = 0) = 0$$

$$w'^*(\xi = 0) = 0$$

$$w''''(\xi = 1) = -\frac{E_2 h_2^2}{m l} d'_{31} G d_a \lambda^4 w^*(\xi = 1)$$

$$w''''(\xi = 1) = -\frac{m_{tip}}{m} \lambda^4 w^*(\xi = 1)$$

e si nota quindi che il termine di controllo compare come un momento di estremità applicato alla trave. L'espressione assunta da tale momento discende dal tipo di controllo messo in atto, cioè quello di velocità e può essere così spiegato: l'elemento sensore adottato, essendo un accelerometro, produce in uscita un segnale di tensione elettrica V_s in fase con l'accelerazione dell'estremità della trave; tale segnale subisce nell'apparato di controllo uno sfasamento in quadratura di ritardo, cioè viene integrato; il segnale così ritardato risulta ora essere un segnale di velocità; l'apparato di controllo amplifica tale segnale opportunamente, ossia lo moltiplica per il suo guadagno G e lo invia all'attuatore, lo strato di piezoelettrico, che essendo un trasduttore trasforma il segnale di tensione in deformazioni per effetto piezoelettrico inverso; le tensioni che così nascono sono in fase con la velocità e si comportano come 'tensioni viscosse' aumentando lo smorzamento strutturale. Ricapitolando:

$$V_s(\xi; t) = d_a \ddot{w}(\xi = 1)$$

in cui d_a è la caratteristica dell'accelerometro:

$$V_s(\xi) = -d_a w^*(\xi = 1) \omega^2$$

ricordando l'espressione di λ in termini di ω ed introducendo il guadagno G dell'amplificatore, si ottiene l'espressione della tensione di attuazione:

$$V_a = -G d_a w^*(\xi = 1) \omega^2$$

che permette di ricavare l'espressione della curvatura di estremità:

$$w^{**}(\xi = 1) = -\frac{l^2}{sEI} E_2 h_2^2 \lambda^4 \frac{sEI}{ml^3} G d_a d'_{13} w^*(\xi = 1)$$

La nascita, per effetto di attuazione dello strato di piezoelettrico, del momento di controllo all'estremità della trave può essere così spiegato: il campo V_a di tensione elettrica, che è costante lungo l'asse della trave, determina la nascita di una caratteristica di sollecitazione momento di attuazione, costante con x , che si instaura applicando equivalentemente un momento di estremità di stesso segno e intensità.

I valori assunti da λ possono essere a questo punto calcolati sostituendo la 8.4 nelle condizioni al contorno ed azzerando il determinante del sistema ottenuto. Si ottiene così:

$$\begin{aligned} & [(K\lambda^2 - 1) \sin \lambda - (K\lambda^2 + 1) \sinh \lambda] \cdot \\ & [(M\lambda \cos \lambda + \sin \lambda) + \\ & - (M\lambda \cosh \lambda + \sinh \lambda)] + \\ & - ((K\lambda^2 - 1) \cos \lambda - (K\lambda^2 + 1) \cosh \lambda) \cdot \\ & [(M\lambda \sin \lambda - \cos \lambda) + \\ & - (M\lambda \sinh \lambda + \cosh \lambda)] \qquad \qquad \qquad = 0 \end{aligned}$$

in cui si è posto:

$$K = \frac{E_2 h_2^2}{ml} G d_a d'_{13}$$

$$M = \frac{m_{tip}}{m}$$

L'equazione sopra ottenuta è stata risolta per differenti valori di K , ed i valori ottenuti di λ sono stati usati per la determinazione del decremento logaritmico ottenuto per i differenti valori assunti dal guadagno. L'espressione assunta in questo caso da ω risulta:

$$\omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{EI}{ml}} \left(-\frac{\eta}{2} \pm j \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{4}} \right)$$

nella quale può essere introdotta la pulsazione del sistema non smorzato e non controllato cui corrisponde il valore λ^* :

$$\omega = \omega_n \left(-\frac{\eta'}{2} \pm j \sqrt{1 + \frac{\eta'^2}{4}} \right)$$

in cui :

$$\eta' = \frac{\lambda}{\lambda^*} \eta$$

rappresenta il fattore di perdita della trave controllata. Inserendo i valori numerici assunti da quest'ultimo nell'espressione del decremento logaritmico, si sono ottenuti i seguenti valori:

K	η	$\zeta_{analitico}$	$\zeta_{sperimentale}$
0	0.05	0.02501	0.0246
175	0.05902	0.0295	0.0320
191	0.0600	0.030	0.0345
233	0.06201	0.0310	0.03413
262.5	0.06421	0.0321	0.03482
300	0.06546	0.0327	0.03526
350	0.06821	0.0341	0.03647
420	0.07163	0.0358	0.03719

mentre i diagrammi dell'andamento dell'oscillazione dell'estremità sono riportati di seguito.

8.6.1 Commento ai risultati.

Si può notare come i risultati ottenuti analiticamente siano in buon accordo con quelli ottenuti sperimentalmente e le differenze possono essere imputate a quegli aspetti del problema che non sono stati tenuti in conto. Uno di questi

riguarda la non perfetta adesione dello strato piezoelettrico a quello di plexiglas, per cui l'elemento collante con la sua elasticità consente la trasmissione solo in parte delle forze di taglio fra gli strati [6]. Si può inoltre avere conducibilità tra le armature dello strato di piezoelettrico per effetto dell'umidità dell'ambiente che riduce l'efficacia del controllo, oltre alla conducibilità del piezoelettrico stesso¹.

8.7 Osservazioni relative alla scelta della distribuzione di tensione $V(x)$.

Queste osservazioni prendono spunto dal lavoro fatto da Burke ed Hubbard in [15] e sono basate sullo studio del funzionale che esprime l'energia potenziale elastica e cinetica del sistema. La derivazione di questo funzionale rispetto al tempo contiene un termine dovuto al controllo esercitato sulla struttura:

$$\dot{F}_{controllo}(t) = \int_0^1 w_{,\xi\xi t}(\xi,t) V(\xi,t) d\xi$$

che al fine di rendere massima l'efficacia del controllo deve a sua volta essere reso minimo (negativo) onde dissipare nel modo più rapido l'energia del sistema. Eseguendo l'integrazione per parti si ottiene:

$$\dot{F}(t) = V(\xi,t)w_{,\xi t} \Big|_0^1 - V_{,\xi}(\xi,t)w_{,t} \Big|_0^1 + \int_0^1 w_{,t}(\xi,t)V_{,\xi\xi}(\xi,t)d\xi \quad (8.5)$$

dalla quale si deduce che le possibilità di controllare la struttura dipendono sia dalla forma assunta dalla V che dalle condizioni di vincolo. In particolare si nota che:

¹In realtà il materiale piezoelettrico non si comporta da perfetto isolante e per questo esso ha un comportamento analogo a quello di un circuito R-C passa-alto. Questo determina alti valori della sua frequenza di taglio che può essere maggiore delle frequenze del sistema meccanico da controllare. A questo inconveniente si può rimediare operando una opportuna 'compensazione' a livello elettronico.

- Una struttura incastrata agli estremi non è controllabile mediante una V costante con x .
- Per una struttura appoggiata agli estremi risultano controllabili solo i modi di ordine dispari cui corrispondono pendenze di segno discorde delle estremità, mentre i modi dispari non risultano interessati dal controllo.

Nonostante la semplicità del metodo di attuazione con una distribuzione costante $V(x)$, si è quindi costretti a prendere in considerazione distribuzioni di tensione non uniformi se si vuole attuare il controllo su questo tipo di strutture. Una soluzione che potrebbe essere adottata allo scopo, sarebbe quella di assumere una distribuzione periodica a gradino in modo da posizionare il cambio di segno di V nei punti a curvatura nulla. In questo modo si renderebbe minimo l'integrale in quanto V e la curvatura assumerebbero sempre segno discorde. Una tale distribuzione per V potrebbe essere ottenuta suddividendo il film piezo in fettine attuate con valori di tensione aventi segno contrario. Questo consentirebbe di controllare un numero elevato di modi propri, teoricamente infinito se la larghezza delle fettine fosse infinitesima. La distribuzione di tensione ora descritta indurrebbe la nascita di coppie concentrate nei punti in cui si ha il cambiamento di segno. Modi ulteriori di ottenere distribuzioni volute di tensione consistono nel variare le caratteristiche elettriche del materiale conduttore con cui vengono placcate le facce del piezo, oppure giocare sullo spessore di quest'ultimo.

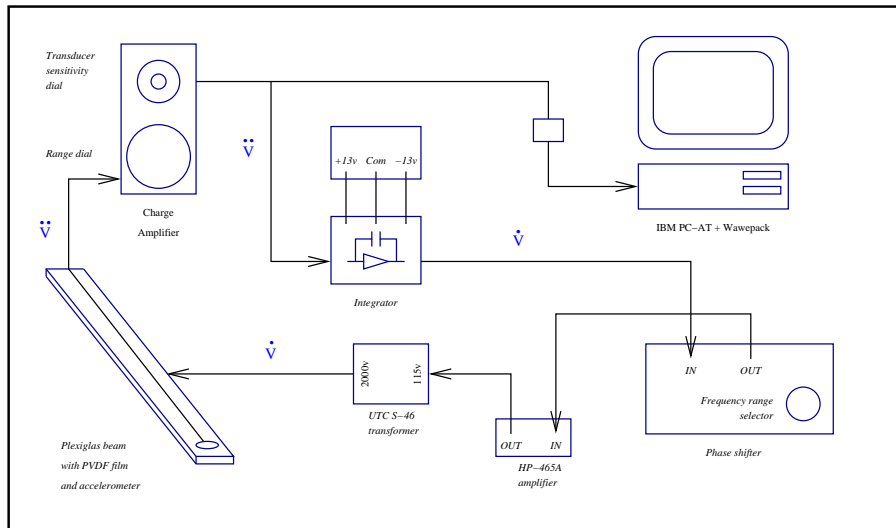


Figura 8.2. Blocco di un sistema.

Appendice A

Il vettore dei carichi nodali di attuazione nel metodo FEM.

A.1 Premessa.

Lo scopo che ha portato alla stesura di questa appendice, è stato quello di fornire l'espressione generica del vettore dei carichi nodali mediante il quale, in un codice di calcolo agli elementi finiti, si potesse tenere conto dell'effetto di attuazione degli strati di materiale piezoelettrico presenti nella stratificazione del composito. Supponendo che chi legge sia già padrone della terminologia adottata nel FEM e di tutte le nozioni relative ad esso, si eviterà di fare richiami relativi al metodo, la cui descrizione può essere trovata nei testi di calcolo strutturale come ad esempio in [18].

A.2 Il vettore dei carichi nodali di attuazione.

Il vettore dei carichi nodali è quel vettore di carichi applicati nei nodi dell'elemento finito che risulta equivalente, in termini di lavoro virtuale compiuto

sull'elemento stesso, al sistema di tensioni indotte negli strati attuatori per effetto piezoelettrico inverso. La sua espressione è ottenibile quindi applicando la definizione:

$$\delta L^A = \sum_{p=1}^{Np} \int_{V_p} \delta\{\varepsilon\}^T \cdot \{\sigma'\} dV_p$$

Sostituendo in questa le espressioni:

$$\{\sigma'\} = [C_p] \cdot \{\varepsilon'\}$$

$$\{\varepsilon'\} = [d_p]^T \cdot \{E_{pA}\}$$

$$\{E_{pA}\} = G \cdot \{E_{kS}\}$$

e decidendo di effettuare un controllo in velocità mediante un sensore costituito da uno strato in materiale piezo (es. lo strato k-esimo) che pilota attraverso Np valori del guadagno i diversi attuatori:

$$\{E_{kS}\} = \int_{V_k} [\chi_k]^{-1} [d_k] [C_k] \{\dot{\varepsilon}_k\} dV_k$$

(In pratica lo strato sensore 'sente' delle deformazioni e le traduce in un segnale elettrico che viene derivato. Questo segnale di velocità viene tramutato in Np segnali amplificati in modo differente secondo le diverse posizioni degli strati attuatori all'interno del composito.)

$$\delta\{\varepsilon\} = [B] \delta\{U\}$$

$$\{\dot{\varepsilon}\}_k = [B] \cdot \{\dot{U}\}$$

si ottiene:

$$\delta L^A = \delta\{U\}^T \sum_{p=1}^{Np} \int_{V_p} [B]^T [C_p] [d_p]^T \left(\int_{V_k} [\chi_k]^{-1} [d_k] [C_k] [B] dV_k \right) dV_p \{\dot{U}\}$$

L'espressione del vettore dei carichi nodali di attuazione è dunque:

$$\{P_A\} = \sum_{p=1}^{N_p} \int_{V_p} [B]^T [C_p] [d_p]^T (\int_{V_k} [\chi_k]^{-1} [d_k] [C_k] [B] dV_k) dV_p \{U\}$$

in cui i simboli fin ora non incontrati indicano:

- $[B]$ è una matrice data dal prodotto di una matrice $[D]$ di operatori differenziali e una matrice $[N]$ di funzioni di forma.
- $\{U\}$ è il vettore degli spostamenti nodali.
- $[\chi_k]$ è la matrice delle suscettività elettriche.
- $\{E_{pA}\}$ è il vettore campo elettrico applicato strato attuatore p , funzione delle coordinate spaziali e del tempo.
- $\{E_{kS}\}$ è il vettore campo elettrico applicato 'letto' dallo strato sensore k , funzione delle coordinate spaziali e del tempo.

Bibliografia

- [1] H. Krauss, *Thin elastic shell*, J. Wiley & Sons, New York, 1967.
- [2] H. S. Tzou M. Gadre, *Theoretical analysis of a multi-layered thin shell coupled with piezoelectric shell actuators for distributed vibration controls* Journal of Sound and Vibration (1989) 132(3), 433-450.
- [3] D. G. Gorman, *Free Vibration Analysis of Beam and Shaft*, J. Wiley & Sons, New York, 1975.
- [4] M. Di Sciuva, U. Icardi, *Discrete-Layer Models for Multilayered Anisotropic Shells Accounting for the Interlayers Continuity Conditions* submitted for publication to Meccanica.
- [5] H. B. Dwight, *Tables of Integral and Other Mathematical Data* Mac Millan Publishing Co.,Inc.,New York, 1961.
- [6] E. F. Crawley J. de Luis, *Use of Piezoelectric Actuators as Element of Intelligent Structures*, AIAA Journal, Vol.25, no.10.
- [7] W. G. Cady, *Piezoelectricity*, Dover, New York, 1964.
- [8] L. Lecce, A. Concilio, F. del Gatto, *Active vibration control using distributed actuators and sensors* atti del Congresso Inter Noise, Goteborg, 1990.

- [9] L. Lecce, A. Concilio, F. del Gatto, *Controllo attivo delle vibrazioni su strutture semplici con attuatori e sensori in materiale piezoelettrico* atti del XVIII Convegno Nazionale dell'Associazione Italiana per l'Analisi delle Sollecitazioni, Amalfi, 1990.
- [10] L. Lecce, A. Concilio, F. del Gatto, P. Vitiello *Esperienze di controllo attivo delle vibrazioni e del rumore mediante materiali piezoelettrici su pannelli* report interno del CIRA (Centro Italiano Ricerche Aerospaziali).
- [11] H. S. Tzou, M. Gadre, *Active Vibration Isolation and Excitation by Piezoelectric Slab with Costant Feedback Gains*, Journal of Sound and Vibration, (1990) 136(3), 477-490.
- [12] H. S. Tzou, M. Gadre, *Active Vibration Isolation by Polymeric Piezoelectric with Variable Feedback Gains*, AIAA Journal, Vol.26, n.8, 1988.
- [13] A. Tartaglia, *Fisica II*, Levrotto & Bella, Torino, 1987.
- [14] G. Genta, *Principi e Metodologie della Progettazione Meccanica*, Levrotto & Bella, Torino, 1989.
- [15] S. E. Burke, J. E. Hubbard, *Distribuite Actuator Control Design for Flexible Beams*, Automatica, Vol. 24, No. 5, (619-627), 1988.
- [16] J. L. Fanson, T. K. Caughey, *Positive Position Feedback Control for Large Space Structures*, AIAA Journal, Vol. 25 (717-724).
- [17] E. Carrera, *The Effect of Shear Deformation and Curvature on Buckling and Vibrations of Cross-ply Laminated Composite Shells*, Journal of Sound and Vibration, (1991) 150(3), 405-433.

BIBLIOGRAFIA

- [18] M. M. Gola, A. Gugliotta *Introduzione al Calcolo Strutturale Sistemico*, Levrotto & Bella, Torino, 1984.